

А. В. ПОГОРЕЛОВ

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ  
ТЕОРИЯ  
УСТОЙЧИВОСТИ  
ОБОЛОЧЕК

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1966



---

# СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

*Серия выпускается под общим руководством  
редакционной коллегии журнала  
«Успехи математических наук»*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1966

517.4  
П 43  
УДК 513.73

*Алексей Васильевич Погорелов*  
Геометрическая теория устойчивости оболочек  
(Серия: «Современные проблемы математики».)

М., 1966 г., 296 стр. с илл.

Редактор *И. Х. Сабитов*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректор *И. Я. Кристал*

---

Сдано в набор 29/XI 1965 г. Подписано к печати 17/II 1966 г. Бумага 84×108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Физ. печ. л. 9,25. Услови. печ. л. 15,54. Уч.-изд. л. 14,21.  
Тираж 7500 экз. Т-21434. Цена книги 1 р. 10 к. Заказ 2075

---

Издательство «Наука»  
ная редакция физико-математической литературы  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

---

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой  
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.  
Измайловский проспект, 29.

2-2-3  
115-66

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### ГЛАВА ПЕРВАЯ

#### СТРОГО ВЫПУКЛЫЕ ОБОЛОЧКИ ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

- § 1. Энергия упругой деформации оболочки в закритической стадии . . . . .
1. Закритическая деформация и геометрические изгибания (19).
  2. Энергия упругой деформации оболочки. Формулировка принципа А (24).
  3. Решение вариационной задачи для функционала  $J$ . Определение постоянных  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$  (34).
- § 2. Закритические деформации строго выпуклых оболочек под внешним давлением . . . . . 43
1. Определение основных величин в случае зеркального выпучивания малых областей (43).
  2. Закритические деформации оболочек под действием сосредоточенной силы (49).
  3. Закритические деформации строго выпуклой оболочки под внешним давлением (52).
  4. Упруго-пластические закритические деформации (64).
- § 3. Об устойчивости закритических осесимметрических деформаций сферической оболочки при осесимметрическом нагружении . . . . . 71
1. Изгибание сферического сегмента. Уравнения изгибания (72).
  2. Решение уравнений изгибания (76).
  3. Определение некоторых величин для поверхности, полученной изгибанием сферического сегмента (81).
  4. Энергия деформации оболочки (85).
  5. Работа внешней нагрузки при деформации оболочки (91).
  6. Об устойчивости осесимметрических деформаций сферической оболочки (93).
  7. О нижней критической нагрузке для пологой сферической оболочки при равномерном внешнем давлении (99).

### ГЛАВА ВТОРАЯ

#### ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТРОГО ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК

- § 1. Потеря устойчивости строго выпуклых оболочек под внешним давлением . . . . . 101
1. Энергия деформации оболочки (102).
  2. Формулировка принципа В и его обоснование (103).
  3. Определение критической нагрузки для строго выпуклых оболочек при равномерном внешнем давлении (113).
  4. Влияние начальной погнб оболочки на

## ОГЛАВЛЕНИЕ

- устойчивость (117). 5. Потеря устойчивости оболочки и критические нагрузки в других случаях нагружения внешним давлением (120). 6. Потеря устойчивости трехслойных оболочек (128).
- § 2. Специальные бесконечно малые изгибания строго выпуклой поверхности 132
1. Общее представление для изгибающих полей (133). 2. Сопряжение изгибающих полей  $\tau$  и  $\tau'$  в простейшем случае (136). 3. Сопряжение изгибающих полей в общем случае (141).
- § 3. Потеря устойчивости оболочек вращения при различных способах нагружения . 146
1. Потеря устойчивости строго выпуклой оболочки под равномерным внешним давлением (146). 2. Специальное изометрическое преобразование выпуклой поверхности вращения (153). 3. Критическое внутреннее давление для выпуклой оболочки вращения (157). 4. Потеря устойчивости выпуклой оболочки вращения под внешним давлением (161). 5. Потеря устойчивости выпуклой оболочки вращения при кручении (165).

## ГЛАВА ТРЕТЬЯ

### ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

- § 1. Закритические деформации цилиндрических оболочек при осевом сжатии 173
1. Специальное изометрическое преобразование цилиндрической поверхности (173). 2. Энергия деформации оболочки. Исследование закритических деформаций при осевом сжатии (181). 3. Влияние начальной погиби на устойчивость. Ограничено упругие оболочки (193). 4. Узкие цилиндрические панели при осевом сжатии (200). 5. Конструктивно ортотропные цилиндрические оболочки при осевом сжатии (206).
- § 2. Цилиндрические оболочки под внешним давлением . 216
1. Выражение для функционала  $W=U-A$  (216). 2. Исследование закритических деформаций неограниченно упругих оболочек под внешним давлением (223). 3. Влияние начальной погиби оболочки на устойчивость при внешнем давлении. Оболочки с ограниченной упругостью материала (226).
- § 3. Цилиндрические оболочки при кручении 231
1. Специальное изометрическое преобразование цилиндрической поверхности (231). 2. Выражение для функционала  $W(Z)$  (237). 3. Исследование закритических деформаций оболочки (243).

## ДОПОЛНЕНИЕ I

### НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИНАМИКИ

- § 1. Строго выпуклые оболочки при динамическом нагружении 251
1. Динамика «хлопка» при равномерном нагружении оболочки (251). 2. Критический импульс (254).
- § 2. Динамическое нагружение цилиндрической оболочки . 257
1. Критический импульс при осевом сжатии (257). 2. Критический импульс при внешнем давлении (254).

**§ 3. Большие колебания цилиндрических оболочек . . .**

1. Собственные колебания цилиндрической оболочки (269). 2. Вынужденные колебания оболочек (274).

**ДОПОЛНЕНИЕ II**

**ОБ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

1. Некоторые общие свойства разгибающихся поверхностей (279).  
2. Качественное исследование изометрического преобразования цилиндрической поверхности (281). 3. Аналитическое описание изометрического преобразования (286).

Цитированная литература	290
Послесловие И. И. Воровича	291

---

Посвящается дорогим учителям  
Александру Даниловичу  
АЛЕКСАНДРОВУ  
Николаю Владимировичу  
ЕФИМОВУ

## ВВЕДЕНИЕ

Оболочкой называется упругое тело, ограниченное двумя поверхностями, расстояние между которыми (толщина оболочки) мало по сравнению с остальными размерами этого тела. Поверхность, делящая толщину оболочки пополам, называется срединной поверхностью. Когда говорят о форме оболочки, обычно имеют в виду форму ее срединной поверхности. Как упругое тело, оболочка под действием приложенной к ней нагрузки испытывает деформацию. При этом в ее материале возникают напряжения. Основная задача теории оболочек состоит в определении деформаций и напряжений, обусловленных действующей на оболочку нагрузкой. Напряжения в материале оболочки находятся просто, если известна деформация оболочки. Поэтому можно считать, что указанная задача сводится к определению деформаций оболочки.

Представим себе, что оболочка  $F$  деформируется, принимая форму  $F'$ . При этой деформации внутренние усилия, возникающие в материале оболочки, производят некоторую работу. Эта работа называется энергией деформации. Пусть

$$\sum g_{ij} du^i du^j, \quad \sum h_{ij} du^i du^j, \quad i, j = 1, 2.$$

— первая и вторая квадратичные формы исходной поверхности, а

$$\sum g'_{ij} du^i du^j, \quad \sum h'_{ij} du^i du^j$$

— соответствующие формы поверхности  $F'$ . Обозначим через  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  экстремальные значения отношения

$$\frac{\sum (g'_{ij} - g_{ij}) du^i du^j}{\sum g_{ij} du^i du^j},$$



а через  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  — экстремальные значения отношения

$$\frac{\sum (h'_{ij} - h_{ij}) du^i du^j}{\sum g_{ij} du^i du^j}.$$

Тогда энергия деформации  $U_{F'}$ , связанная с переходом оболочки из формы  $F$  в  $F'$ , вычисляется по формуле

$$U_{F'} = \int_F \int \frac{E\delta^3}{24(1-\nu^2)} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\nu\kappa_1\kappa_2) d\sigma + \\ + \int_F \int \frac{E\delta}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2) d\sigma,$$

где  $E$  и  $\nu$  — упругие постоянные материала оболочки,  $\delta$  — ее толщина, а интегрирование выполняется по площади поверхности  $F$ .

Если к оболочке приложена некоторая нагрузка  $q$ , то при деформации оболочки из формы  $F$  в  $F'$  эта нагрузка производит некоторую работу. Обозначим ее через  $A_{F'}(q)$ .

Один из методов решения основной задачи теории оболочек основан на следующем вариационном принципе.

*Под действием заданной нагрузки  $q$ , среди всех возможных форм  $F'$ , удовлетворяющих условиям закрепления, оболочка принимает такую форму, на которой функционал*

$$W = U_{F'} - A_{F'}(q)$$

*стационарен, то есть имеет равную нулю вариацию.*

Легко представить себе трудности, которые возникают при решении указанной вариационной задачи. Если обозначить через  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  составляющие перемещения точек поверхности  $F$  при деформации ее в  $F'$ , то подынтегральная функция для энергии деформации  $U_{F'}$  представляет собой довольно сложное выражение, содержащее функции  $w_i$  и их производные первого и второго порядка. Поэтому решение этой задачи даже в простейших случаях практически невыполнимо.

Если заранее предположить, что форма деформированной оболочки  $F'$  близка к первоначальной ( $F$ ), то функционал  $W$  естественно упрощается и приводится к квадратичному. Соответствующая система уравнений Эйлера для функций  $w_i$ ,

реализующих экстремум функционала  $W$ , будет линейной. Решение основной задачи в этом простейшем случае составляет предмет линейной теории оболочек.

Пусть оболочка  $F$  находится под действием некоторой нагрузки  $q$ . Если нагрузка мала, то упругое состояние оболочки среди форм, близких к  $F$ , определяется однозначно. Будем увеличивать нагрузку  $q$ . Тогда может наступить такой момент, когда указанным условием близости упругое состояние оболочки однозначно не определяется. Именно, наряду с основной формой упругого равновесия оболочки, для которой деформированная поверхность оболочки остается близкой к первоначальной форме ( $F$ ) и при дальнейшем увеличении нагрузки, существуют другие формы, которые развиваются практически без добавочного увеличения действующей нагрузки, причем это развитие сопровождается значительными изменениями внешней формы оболочки. Наименьшая нагрузка, при которой имеет место указанная неоднозначность упругих состояний, называется *верхней критической нагрузкой*, а переход к неосновным формам упругих состояний — потерей устойчивости оболочки.

Упругие состояния оболочки, возникающие в результате потери устойчивости, мы условно называем *закритическими*. Определение и исследование этих состояний представляет собой существенно нелинейную задачу. Решая ее, обычно задаются характером прогибов оболочки, сводя таким образом вариационную задачу для функционала  $W$  к задаче на экстремум для функций от параметров, характеризующих деформацию. При этом результат существенно зависит от того, насколько удачно выбраны функции, задающие деформацию. Предлагаемый нами метод исследования закритических упругих состояний оболочек основан в своей существенной части на геометрических соображениях и в общих чертах состоит в следующем.

Прежде всего, мы исходим из предположения о том, что закритическая деформация оболочки представляет собой в основном геометрическое изгибание. Это нетрудно обосновать. Действительно, наиболее ходовые конструктивные материалы — металлы — в упругой области допускают малые относительные деформации. Так, например, для стали с модулем упругости  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$  и временным сопротивлением  $\sigma_s = 4 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2$  относительные деформации меньше,

чем  $\sigma_0/E = 2 \cdot 10^{-3}$ . Это значит, что всякая упругая деформация стальной оболочки сопровождается относительным изменением метрики ее срединной поверхности, меньшим, чем  $2 \cdot 10^{-3}$ . Поэтому, если такая деформация приводит к значительным изменениям формы оболочки, то она представляет собой почти геометрическое изгибание.

Далее, обычные условия закрепления края оболочки гарантируют геометрическую неизгибаемость ее срединной поверхности в классе регулярных поверхностей. Поэтому изгибания, соответствующие закритическим деформациям, принадлежат более широкому классу кусочно-регулярных поверхностей. Это значит, что поверхность, воспроизводящая форму оболочки при закритической деформации, должна иметь ребра. На поверхности оболочки эти ребра сглажены.

Близость закритической деформации оболочки к некоторому ее изометрическому преобразованию с особенностями вдоль линий (ребер) создает определенную специфику в распределении энергии деформации по поверхности оболочки. А именно, она заметно концентрируется в окрестности ребер. Соображения, основанные на вариационном принципе, позволяют уточнить форму деформированной оболочки вблизи ребер и определить энергию деформации в окрестности ребер в зависимости от геометрических величин, относящихся к ребру. В результате функционал  $U$  — энергия деформации — оказывается определенным на изометрических преобразованиях срединной поверхности, воспроизводящих форму оболочки при закритической деформации. Так мы приходим к следующему вариационному принципу А.

*Значительная закритическая деформация упругой оболочки под действием данной нагрузки близка к той форме изометрического преобразования исходной поверхности, которая сообщает стационарное значение функционалу*

$$W = U_{\tilde{F}} - A_{\tilde{F}}.$$

*Этот функционал определен на кусочно-регулярных изометрических преобразованиях  $\tilde{F}$  срединной поверхности оболочки. Его слагаемое  $U_{\tilde{F}}$  (энергия деформации)*

определяется следующей формулой:

$$U_{\tilde{F}} = \frac{E\delta^3}{24(1-\nu^2)} \int_{\tilde{F}} \int (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2) d\sigma + \\ + cE\delta^{5/2} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{\alpha^{5/2}}{\rho^{1/2}} ds_{\tilde{\gamma}} + \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} \int_{\tilde{\gamma}} \alpha(-2k + k_e + k_l) ds_{\tilde{\gamma}}.$$

Здесь  $\Delta k_1$  и  $\Delta k_2$  — главные изменения нормальных кривизн при переходе от исходной формы оболочки  $F$  к изометрическому преобразованию  $\tilde{F}$ ;  $2\alpha$  — угол между касательными плоскостями поверхности  $\tilde{F}$  вдоль ребра (ребер)  $\tilde{\gamma}$ ;  $\rho$  — радиус кривизны кривой  $\tilde{\gamma}$ ;  $k_e$  и  $k_l$  — нормальные кривизны поверхности  $\tilde{F}$  в направлении, перпендикулярном ребру  $\tilde{\gamma}$ ,  $k$  — нормальная кривизна поверхности  $F$  в соответствующем направлении;  $\delta$  — толщина оболочки,  $E$  — модуль упругости, а  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Постоянная  $c \simeq 0,19$ . Интегрирование в первом слагаемом выполняется по площади поверхности  $\tilde{F}$ , а в остальных двух слагаемых — по дуге кривой  $\tilde{\gamma}$ .

Слагаемое  $A_{\tilde{F}}$  представляет собой производимую внешней нагрузкой работу при деформации оболочки из формы  $F$  в  $\tilde{F}$  и вычисляется как обычно.

Упругие деформации оболочки в форме, близкой к  $\tilde{F}$ , определяемой принципом А, сопровождаются появлением на ее поверхности значительных напряжений от изгиба в окрестности ребер. Максимальные напряжения  $\sigma$ , связанные с этим изгибом, определяются по формуле

$$\sigma = c'E \frac{\delta^{1/2} \alpha^{3/2}}{\rho^{1/2}}, \quad c' \simeq 0,9.$$

Таким образом, применение принципа А позволяет найти форму оболочки в основном приближении и возникающие на ее поверхности максимальные напряжения. А это и есть решение основной задачи.

Применение принципа А позволяет выяснить, как изменяется воспринимаемая оболочкой нагрузка при закритической деформации и, таким образом, найти наименьшую воспринимаемую оболочкой нагрузку. Она называется *нижней*

*критической*. Определение этой нагрузки представляет значительный интерес по следующей причине. Реальные оболочки геометрически несовершенны, несовершенно также и нагруженные оболочки. Оба эти фактора снижают, притом весьма неопределенно, верхнее критическое значение нагрузки. В связи с этим, чтобы полностью исключить возможность потери устойчивости оболочки, приходится ориентироваться на нижнюю критическую нагрузку. Нижняя критическая нагрузка связана со значительными деформациями оболочки и поэтому менее чувствительна к несовершенству геометрической формы и способу нагружения. Определение упругих закритических состояний оболочки позволяет дать естественную оценку снизу для влияния геометрических несовершенств ее формы на величину верхней критической нагрузки.

Следует заметить, что сведение общего вариационного принципа в случае закритических деформаций к принципу А предполагает решение задачи об изометрических преобразованиях исходной поверхности. Эта задача также является довольно трудной. Однако в ряде конкретных случаев геометрические и другие соображения качественного характера позволяют значительно сузить класс изометрических преобразований, на которых надо рассматривать функционал  $W$ . Так, например, изучая вопрос о закритических деформациях пологих строго выпуклых оболочек, закрепленных по краю, представляется возможным ограничиться простейшими изометрическими преобразованиями—зеркальным выпучиванием. Зеркальное выпучивание состоит в зеркальном отражении произвольного сегмента поверхности в плоскости его основания.

Исследование закритических деформаций реальных, следовательно, ограничено упругих оболочек невозможно без учета ограниченной упругости материала оболочки, так как возникающие при таких деформациях напряжения, как правило, находятся за пределом упругости материала. Закритические деформации таких оболочек отличаются некоторой спецификой. Оказывается, что *деформация, связанная с перемещением ребра по поверхности, останавливается в момент появления на этом ребре пластических деформаций*. В связи с этим принцип А для оболочек с ограниченной упругостью дополняется следующим условием.

Ограниченно упругая оболочка допускает только такие закритические деформации, определяемые принципом А, при которых напряжения  $\sigma$  на ребрах, вычисляемые по формуле

$$\sigma = c'E \frac{\delta^{1/2} \alpha^{3/2}}{\rho^{1/2}},$$

не превосходят временного сопротивления материала  $\sigma_0$ . (Мы считаем, что временное сопротивление является пределом упругости.) Исследование закритических состояний для ограниченно упругих оболочек с учетом указанного дополнения к принципу А приводит к качественно новым результатам, которые позволяют объяснить данные соответствующих экспериментов.

Как указано выше, значительный интерес представляет определение нагрузки, при которой оболочка теряет устойчивость. Предлагаемый нами метод позволяет подойти к решению и этой задачи. Дело в том, что воспринимаемая оболочкой нагрузка в момент потери устойчивости стационарна, и при переходе к закритическим деформациям она практически не изменяется, в то время как форма оболочки изменяется весьма существенно. В связи с этим представляется возможным определять верхнюю критическую нагрузку как нагрузку, воспринимаемую оболочкой при значительном выпучивании. Исследование в этом плане в итоге приводит к следующему принципу В.

Если действующая на оболочку нагрузка критическая, то вариационная задача для функционала

$$W = U - A$$

на разрывных бесконечно малых изгибаниях срединной поверхности имеет нетривиальное решение, то есть изгибающее поле, являющееся решением, не равно тождественно нулю. Функционал  $W$  определяется на полях бесконечно малых изгибаний с разрывами вдоль линий, где удовлетворяются условия сопряжения

$$\tau - \tau' = \kappa e.$$

Здесь разность  $\tau - \tau'$  есть разрыв изгибающего поля, а  $e$  — единичный вектор бинормали кривой  $\gamma$ , вдоль которой происходит разрыв. Слагаемое  $U$  функционала  $W$  (энергия

деформации) вычисляется по формуле

$$U = \int_{\gamma} \frac{2E\delta^2\alpha^2\kappa}{\sqrt{12}(1-\nu^2)\rho} ds,$$

где  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $E$  и  $\nu$  имеют прежнее значение,  $\kappa$  — величина разрыва, а интегрирование выполняется по дуге кривой (кривых)  $\gamma$ . Слагаемое  $A$  функционала  $W$  вычисляется обычным образом как производимая внешней нагрузкой работа при деформации, задаваемой изгибающим полем.

Теперь о содержании книги. Она состоит из трех глав и двух Дополнений. В главе первой изучаются закритические деформации строго выпуклых оболочек, то есть оболочек с положительной гауссовой кривизной. Глава начинается напоминанием некоторых геометрических фактов, относящихся к изгибанию выпуклых поверхностей. Затем следует обоснование принципа  $A$  и его применение к исследованию закритических упругих состояний оболочки. В частности, обстоятельно рассматривается вопрос о закритических деформациях пологих, жестко закрепленных по краю оболочек при различных способах нагружения. Основные результаты сопоставляются с данными тщательно поставленных экспериментов. Особо рассматриваются закритические деформации ограниченно упругих оболочек. В конце главы исследуется вопрос об устойчивости осесимметрических деформаций сферической оболочки при осесимметрическом нагружении. В итоге этого исследования выясняются конкретные условия применимости полученных в гл. I результатов.

Вторая глава посвящена исследованию потери устойчивости строго выпуклых оболочек. Она начинается обоснованием принципа  $B$  и его применением к задаче об устойчивости пологой, закрепленной по краю, строго выпуклой оболочки при равномерном внешнем давлении (§ 1). В § 2 содержится геометрическое исследование специальных бесконечно малых изгибаний строго выпуклой поверхности, а в § 3 результаты этого исследования применяются при определении критических нагрузок для оболочек вращения при различных способах нагружения (внешнее давление, внутреннее давление, кручение).

В третьей главе рассматриваются вакритические деформации цилиндрических оболочек в основных случаях нагру-

жения (осевое сжатие, внешнее давление, кручение). Исследования основаны на применении принципа А. Здесь определяются нижние критические нагрузки для неограниченно упругих оболочек и для оболочек с ограниченной упругостью, а также изучается влияние начальной погиби оболочки на устойчивость. Результаты теоретического исследования также сопоставляются с данными экспериментов.

В Дополнении I рассматриваются некоторые вопросы динамики оболочек. Методы исследования статических задач теории оболочек, развитые в книге, в ряде случаев могут быть с успехом применены к задачам динамики. В Дополнении это иллюстрируется на конкретных примерах.

В Дополнении II изучаются изометрические преобразования цилиндрических поверхностей, соответствующие закритическим деформациям с образованием вмятин на всю длину оболочки; даются геометрическое и аналитическое описания этих преобразований.

Конкретные результаты, содержащиеся в данной книге, в основном опубликованы в отдельных выпусках издательства Харьковского университета [1—7]. В настоящем изложении неточности предыдущих публикаций устранены, а главное, сформулированы общие принципы, с помощью которых получают конкретные результаты (принципы А и В).

Чтение предлагаемой книги не требует больших познаний в теории оболочек, однако предполагает известную геометрическую культуру. Основные результаты сформулированы, как правило, вполне доступно. Они представлены либо соответствующими формулами, либо графиками. В этом смысле книга доступна широкому кругу читателей.

---



## ГЛАВА ПЕРВАЯ

### СТРОГО ВЫПУКЛЫЕ ОБОЛОЧКИ ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Предлагаемое исследование упругих оболочек при закритических деформациях мы начнем с рассмотрения строго выпуклых оболочек. Это оболочки, у которых срединная поверхность имеет положительную нормальную кривизну по любому направлению. Прежде всего, мы обоснуем некий общий принцип А, который стандартным образом применяется при решении различных задач. Этот принцип сводит решение задачи об упругих закритических состояниях оболочки к рассмотрению вариационной задачи для функционала, определенного на кусочно-регулярных изометрических преобразованиях исходной формы оболочки. Затем мы перейдем к решению конкретных задач и сопоставим полученные результаты с данными соответствующих экспериментов.

Реальные оболочки, обладая ограниченной упругостью, в закритическом состоянии, как правило, испытывают упруго-пластические деформации. В связи с этим принцип А уточняется применительно к случаю оболочек, обладающих ограниченной упругостью.

Предлагаемый метод исследования закритических деформаций допускает обширную, но все же ограниченную область применения к реальным оболочкам. Мы имеем это в виду и поэтому будем стремиться очертить эту область соответствующими условиями.

#### § 1. Энергия упругой деформации оболочки в закритической стадии

Упругие деформации оболочки сопровождаются малыми изменениями метрики ее срединной поверхности. Поэтому, если такая деформация оболочки приводит к значительным

изменениям ее внешней формы, то она (форма) определяется в основном геометрией ее исходного состояния и близка к изометрическому преобразованию. В связи с этим мы напомним некоторые геометрические факты, относящиеся к изгибанию поверхностей.

**1. Закритическая деформация и геометрические изгибания.** Пусть  $F$  — регулярная (по крайней мере дважды дифференцируемая) поверхность. Это значит, что на поверхности может быть введена криволинейная координатная сеть  $u, v$  так, что вектор-функция  $r(u, v)$ , задающая поверхность в этих координатах, является регулярной (по крайней мере дважды дифференцируемой) функцией. Линейным элементом поверхности, отвечающим данной параметризации  $u, v$ , называется дифференциальная квадратичная форма

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

$$E = r_u^2, \quad F = r_u r_v, \quad G = r_v^2.$$

Поверхности, у которых при соответствующей параметризации  $u, v$  линейные элементы одинаковы, называются *изометричными*. Геометрически это означает, что существует соответствие точек этих поверхностей, при котором любые две соответствующие кривые на этих поверхностях имеют одинаковые длины. Указанное геометрическое свойство может быть принято за определение понятия изометрии. В таком виде оно имеет смысл и для нерегулярных поверхностей.

Если среди поверхностей данного класса каждая поверхность, изометричная  $F$ , равна  $F$ , то поверхность  $F$  называется *однозначно определенной* в этом классе. Например, любая замкнутая выпуклая поверхность (даже без предположения о регулярности) является однозначно определенной в классе выпуклых поверхностей [8].

Указание класса рассматриваемых поверхностей существенно. Одна и та же поверхность может быть однозначно определенной в одном классе поверхностей и в то же время не быть однозначно определенной в другом, более широком классе. Так, замкнутая выпуклая поверхность не является однозначно определенной в классе кусочно-выпуклых поверхностей.

Действительно, пусть  $F$  — замкнутая выпуклая поверхность. Проведем плоскость  $\alpha$ , пересекающую поверхность  $F$ , и отразим одну из ее частей, на которые она разбивается плоскостью  $\alpha$ , зеркально в этой плоскости (рис. 1). Замкнутая

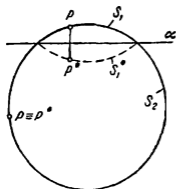


Рис. 1.

поверхность  $F^*$ , составленная из части  $S_2$  исходной поверхности и  $S_1^*$  — зеркального отражения  $S_1$  в плоскости  $\alpha$  — изометрична поверхности  $F$ . Изометрическое соответствие состоит в сопоставлении каждой точке  $P$  поверхности  $F$ , принадлежащей  $S_2$ , совпадающей с ней точки поверхности  $F^*$ , а точке  $P$ , принадлежащей  $S_1$  — точки  $P^*$ , являющейся зеркальным изображением  $P$  в плоскости  $\alpha$ . Очевидно, такое отображение  $F$  на  $F^*$  является изометрическим. Но поверхности  $F$  и  $F^*$  за-

ведомо не равны, ибо не существует такого движения или движения и зеркального отражения для всей поверхности  $F$  (а не отдельных ее частей), которое совмещало бы ее с поверхностью  $F^*$ . Условимся называть рассмотренное изометрическое преобразование поверхности  $F$  в  $F^*$  *зеркальным выпучиванием*.

Если  $F$  — данная поверхность и  $F'$  — поверхность, изометричная  $F$ , то говорят также, что  $F'$  получена *геометрическим изгибанием* (или просто *изгибанием*) из  $F$ . Иногда под изгибанием понимают непрерывную деформацию поверхности  $F$  в  $F'$  с сохранением изометрии в каждый момент деформации. Мы будем употреблять слово «изгибание» как в том, так и в другом смысле, уточняя его в тех случаях, когда это может привести к недоразумениям. Заметим, что в рассмотренном примере зеркального выпучивания выпуклой поверхности  $F$  поверхность  $F^*$  может быть получена непрерывным изгибанием из  $F$ . Для этого достаточно взять плоскость  $\alpha$ , сначала не пересекающую поверхность, и затем надвигать ее на поверхность, выполняя в каждом положении указанное построение с зеркальным отражением отсекаемой части.

В связи с предстоящими приложениями для нас особый интерес представляют изгибания строго выпуклых регулярных

поверхностей с краем при условии неподвижности как точек края, так и касательных плоскостей поверхности в этих точках. Для таких поверхностей мы прежде всего установим их однозначную определенность в классе дважды дифференцируемых поверхностей.

Пусть  $F$  — дважды дифференцируемая строго выпуклая поверхность с краем  $\gamma$ . Нетрудно дополнить ее до некоторой замкнутой выпуклой поверхности  $\Phi$ , например, взяв выпуклую оболочку поверхности  $F$ . Если бы поверхность  $F$  при указанном закреплении края  $\gamma$  допускала нетривиальное изометрическое преобразование в классе регулярных поверхностей, то замкнутая поверхность  $\Phi$ , очевидно, допускала бы изометрическое преобразование в классе выпуклых поверхностей. Но это невозможно в силу теоремы об однозначной определенности для таких поверхностей. Утверждение доказано.

Как указано выше, поверхность  $F$ , будучи неизгибаемой в одном классе поверхностей, может быть изгибаема в более широком классе. В частности, регулярная, закрепленная по краю строго выпуклая поверхность неизгибаема в классе регулярных поверхностей, но изгибаема в классе кусочно-регулярных поверхностей. В этом нас убеждает пример зеркального выпучивания. Здесь изометрическое преобразование связано с нарушением регулярности (образованием ребра) вдоль некоторой кривой, ограничивающей выпуклую область на поверхности. В связи с этим рассмотрим следующий вопрос. Каково наиболее общее изометрическое преобразование регулярной, закрепленной по краю, строго выпуклой поверхности в классе кусочно-регулярных поверхностей, если нарушение регулярности разрешается лишь вдоль заданной кривой  $\gamma$ , ограничивающей выпуклую область  $G$  на поверхности  $F$ ?

Пусть  $G'$  — часть поверхности  $F$ , расположенная вне области  $G$  и примыкающая к краю. Прежде всего, мы утверждаем, что при любом изометрическом преобразовании поверхности  $F$  с нарушением регулярности только вдоль кривой  $\gamma$  поверхность  $G'$  не изменяется, то есть точки ее остаются неподвижными. Это вытекает из единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения, к рассмотрению которого сводится задача о построении поверхности, изометричной данной. Это уравнение Монжа —

Ампера эллиптического типа. Закрепление края поверхности дает начальные условия для указанной задачи Коши. Неизменяемость области  $G'$  влечет за собой неизменяемость ее края  $\gamma$ . Таким образом, при изометрическом преобразовании поверхности  $F$  деформируется только часть  $G$ , причем  $\gamma$  — край области  $G$  — остается неподвижным. Пусть при изометрическом преобразовании  $F$  в  $\bar{F}$  ее часть  $G$  переходит в  $\bar{G}$ .

Если поверхность  $\bar{G}$  обращена выпуклостью в ту же сторону, что и  $G$ , то  $\bar{F}$  будет выпуклой поверхностью. Нетрудно заключить, что в этом случае она должна совпадать с  $F$ . Для этого достаточно воспользоваться рассуждением, с помощью которого установлена однозначная определенность  $F$  в классе регулярных поверхностей. Итак, если поверхность  $F$  допускает нетривиальное изометрическое преобразование, то надо считать, что  $\bar{G}$  обращена выпуклостью в другую сторону. При этом поверхности  $G$  и  $\bar{G}$ , имея общий край  $\gamma$ , составляют замкнутую выпуклую поверхность (рис. 2).

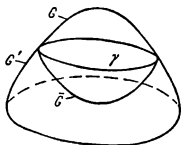


Рис. 2.

Обозначим ее  $\Phi$ . Поверхность  $\Phi$  допускает изометрическое отображение на себя. Это отображение состоит в сопоставлении каждой точке  $P$  области  $G$  соответствующей по изометрии точки области  $\bar{G}$  и каждой точке  $P$  области  $\bar{G}$  соответствующей по изометрии точки области  $G$ .

Ввиду однозначной определенности замкнутых выпуклых поверхностей построенное изометрическое отображение поверхности  $\Phi$  на себя должно сводиться к движению или к движению и зеркальному отражению. Так как точки кривой  $\gamma$  при изометрическом отображении остаются неподвижными, то дело сводится к зеркальному отражению поверхности  $\Phi$  относительно некоторой плоскости. Кривая  $\gamma$ , будучи неподвижной, должна лежать в этой плоскости. Таким образом, мы приходим к следующему выводу.

*Изометрическое преобразование строго выпуклой регулярной поверхности, закрепленной по краю, в классе кусочно-регулярных поверхностей с наруше-*

нием регулярности только вдоль кривой  $\gamma$ , ограничивающей выпуклую область  $G$ , возможно только тогда, когда кривая  $\gamma$  плоская, и в этом случае оно сводится к зеркальному отражению области  $G$  в плоскости кривой  $\gamma$ .

Обратимся теперь к *закритическим деформациям упругих оболочек*. Прежде всего, поясним понятие закритической деформации. Под закритической деформацией мы будем понимать деформацию, при которой оболочка испытывает значительные изменения внешней формы. Такие деформации возникают обычно в результате потери устойчивости оболочки, когда действующая нагрузка достигает критического значения. Отсюда и название — закритические деформации.

Материалы, из которых изготавливаются оболочки, как правило, не допускают значительных внутренних деформаций. Например, для стали с временным сопротивлением  $\sigma_b = 4 \cdot 10^3$  кг/см<sup>2</sup> и модулем упругости  $E = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup> относительное растяжение (сжатие)  $\epsilon$  в области упругих деформаций не превосходит величины

$$\frac{\sigma_b}{E} = 0,002.$$

Примерно такое же соотношение имеет место для других наиболее распространенных конструктивных материалов. Отсюда мы делаем следующий важный вывод.

*При закритической деформации упругой оболочки ее срединная поверхность испытывает в основном изометрическое преобразование.*

Следует, однако, заметить, что этот вывод имеет реальное значение только тогда, когда речь идет о значительных изменениях формы оболочки при деформации. Если же деформированная оболочка имеет форму, близкую к исходной, то наш вывод тривиален и является следствием этой близости.

Пусть строго выпуклая оболочка с регулярной поверхностью, закрепленная по краю, под действием некоторой нагрузки деформируется с выпучиванием по выпуклой области  $G$ . Выясним форму деформированной оболочки, предполагая выпучивание значительным. Так как закритическая деформация оболочки есть в основном геометрическое изгибание, а всякое изгибание закрепленной по краю выпуклой

поверхности с выпучиванием выпуклой области сводится к зеркальному выпучиванию, то мы заключаем:

*Значительная закритическая деформация закрепленной по краю строго выпуклой оболочки неизбежно близка к соответствующей форме зеркального выпучивания.*

Ввиду указанного приближения закритической упругой деформации зеркальным выпучиванием, требование, чтобы изменение формы оболочки было значительным, по существу сводится к тому, чтобы область выпучивания охватывала значительную часть оболочки. Однако, как мы увидим позже, для реальных оболочек из-за ограниченной упругости материала область выпучивания оказывается определенным образом ограниченной. В результате наш вывод о приближении упругого выпучивания зеркальным имеет реальное значение только для оболочек малых размеров или, при данных размерах, для достаточно пологих оболочек. В связи с этим наши рассуждения в настоящей главе будут относиться к пологим строго выпуклым оболочкам.

**2. Энергия упругой деформации оболочки.** Формулировка принципа А. Пусть упругая оболочка  $F$  с регулярной поверхностью под действием некоторой нагрузки, которую уточнять не будем, испытывает закритическую деформацию, принимая форму  $\bar{F}$ . Если срединная поверхность оболочки геометрически неизгибаема в классе регулярных поверхностей, то деформированная оболочка  $\bar{F}$  близка к соответствующей форме  $\tilde{F}$  изометрического преобразования  $F$  с нарушением регулярности вдоль некоторых линий  $\tilde{\gamma}$  и образованием ребер вдоль этих линий. Наличие особенностей в виде ребер на изометрическом преобразовании  $\tilde{F}$  поверхности  $F$  и близость поверхности  $\tilde{F}$  к  $\bar{F}$  дают основание говорить о ребрах (сглаженных ребрах) на деформированной поверхности оболочки  $\bar{F}$ . Разумеется, их форма и положение определены только в известном приближении, зависящем от близости деформированной оболочки  $\bar{F}$  к поверхности  $\tilde{F}$ . Для того, чтобы условным ребрам  $\tilde{\gamma}$  на поверхности деформированной оболочки приписать определенную форму и положение, мы поступим следующим образом. Ребру  $\tilde{\gamma}$  на по-

верхности  $\tilde{F}$  по изометрии соответствует некоторая кривая  $\gamma$  на исходной поверхности  $F$ . При рассматриваемой деформации этой кривой на деформированной оболочке соответствует кривая  $\tilde{\gamma}$ . Эту кривую естественно принять за условное ребро.

Наша ближайшая задача состоит в определении энергии упругой деформации при переходе от  $F$  к  $\tilde{F}$ . Эту энергию  $U$  представляется целесообразным разбить на две части —  $U'$  и  $U''$ . Под  $U'$  мы будем понимать энергию деформации по основной поверхности оболочки вне окрестности ребер  $\tilde{\gamma}$ , а под  $U''$  — энергию деформации внутри указанных окрестностей.

*Относительно энергии  $U'$  мы будем предполагать, что она состоит в основном из энергии изгиба, и, следовательно, на единицу площади поверхности она определяется по известной формуле*

$$\bar{U}' = \frac{D}{2} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2),$$

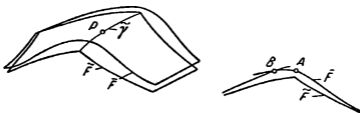
где  $D$  — жесткость оболочки на изгиб, а  $\Delta k_1$  и  $\Delta k_2$  — главные изменения нормальных кривизн оболочки при ее деформации в форму  $\tilde{F}$ . Ввиду того, что нарушение регулярности поверхности  $\tilde{F}$  происходит только на ребрах  $\tilde{\gamma}$ , можно считать, что поверхности  $\tilde{F}$  и  $\tilde{F}$  вне окрестности ребер не только точечно близки, но имеют также близкие нормальные кривизны по соответствующим направлениям. Отсюда следует, что в формуле для  $\bar{U}'$  величины  $\Delta k_1$  и  $\Delta k_2$  можно считать изменениями нормальных кривизн при переходе от поверхности  $F$  к изометрическому преобразованию  $\tilde{F}$ .

Для того чтобы получить энергию  $U'$ , надо проинтегрировать выражение  $\bar{U}'$  по площади поверхности  $\tilde{F}$ , исключая окрестности ребер. При этом, если окрестности малы, как это мы и будем предполагать, то интегрирование можно распространить на всю поверхность  $\tilde{F}$ . Поэтому

$$U' = \frac{D}{2} \int \int_{\tilde{F}} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2) d\sigma.$$



Обратимся теперь к энергии деформации  $U''$  в окрестности ребер. Пусть  $P$  — произвольная точка ребра  $\tilde{\gamma}$  на поверхности  $\tilde{F}$ . Ограничиваясь рассмотрением вблизи этой точки, введем цилиндрическую систему координат  $\varphi, r, z$ , приняв в качестве оси системы прямую, проходящую через центр соприкасающегося круга кривой  $\tilde{\gamma}$  в точке  $P$  перпендикулярно плоскости этого круга. Выделим двумя радиальными плоскостями, близкими  $P$ , элемент оболочки из окрестности кривой  $\tilde{\gamma}$  и вычислим в нем энергию деформации (рис. 3). Из наглядных соображений о деформации оболочки



в окрестности ребра мы заключаем, что энергия деформации выделенного элемента состоит в основном из энергии изгиба в плоскости, перпендикулярной ребру и энергии растяжения-сжатия в направлении ребра.

Пусть сечение поверхности  $\tilde{F}$  плоскостью, перпендикулярной ребру в точке  $P$ , в координатах  $r, z$  задается уравнением

$$z = z(r).$$

Обозначим через  $u$  и  $v$  смещения точек поверхности  $\tilde{F}$  при деформации ее в  $\tilde{F}$ :  $u$  — по главной нормали, а  $v$  — по бинормали кривой  $\tilde{\gamma}$  в точке  $P$ . Тогда, если касательные плоскости поверхности  $\tilde{F}$  вдоль кривой  $\tilde{\gamma}$  образуют малый угол, то изменение нормальной кривизны при переходе от поверхности  $\tilde{F}$  к  $\bar{F}$  в направлении, перпендикулярном ребру, будет равно

$$\Delta_1 k \simeq v''.$$

где дифференцирование ведется по переменному  $r$ . Если теперь изменение нормальной кривизны в том же направле-

нии при переходе от исходной формы  $F$  к  $\tilde{F}$  обозначить  $\Delta k$ , то общее изменение нормальной кривизны при деформации  $F$  в  $\tilde{F}$  будет равно

$$\Delta_2 k = \nu'' + \Delta k.$$

Энергия изгиба  $U_1''$  одного элемента определяется по формуле

$$U_1'' = \frac{D}{2} \int \int (\nu'' + \Delta k)^2 d\sigma,$$

где интегрирование выполняется по площади элемента.

Относительная деформация растяжения — сжатия срединной поверхности оболочки в направлении, перпендикулярном рассматриваемому сечению, очевидно, будет равна

$$\varepsilon \simeq \frac{u}{\rho},$$

где  $\rho$  — радиус кривизны ребра  $\tilde{\gamma}$  в точке  $P$ . Отсюда для энергии деформации  $U_2''$ , связанной с растяжением (сжатием) срединной поверхности выделенного элемента, получается выражение

$$U_2'' = \frac{D'}{2} \int \int \frac{u^2}{\rho^2} d\sigma,$$

где  $D'$  — жесткость оболочки на растяжение (сжатие).

Обозначим через  $2\bar{\varepsilon}$  ширину рассматриваемой окрестности ребра  $\tilde{\gamma}$ . Тогда полная энергия деформации выделенного элемента оболочки может быть представлена в виде

$$U'' = \left\{ \frac{D}{2} \int_{-\bar{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} (\nu'' + \Delta k)^2 ds + \frac{D'}{2} \int_{-\bar{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} \frac{u^2}{\rho^2} ds \right\} \Delta l,$$

где  $\Delta l$  — ширина элемента в направлении  $\tilde{\gamma}$ . Пусть  $\bar{U}''$  — энергия деформации в окрестности ребра на единицу его длины. Тогда

$$\bar{U}'' = \frac{D}{2} \int_{-\bar{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} (\nu'' + \Delta k)^2 ds + \frac{D'}{2} \int_{-\bar{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} \frac{u^2}{\rho^2} ds.$$

Здесь  $\Delta k$  — изменение нормальной кривизны в направлении, перпендикулярном ребру, при переходе от исходной формы  $F$  к  $\tilde{F}$ , а интегрирование выполняется по ширине  $2\epsilon$  окрестности ребра  $\tilde{\gamma}$ .

Поскольку мы игнорируем деформацию срединной поверхности в направлении, перпендикулярном ребру, то переменные  $u$ ,  $v$ , определяющие деформацию оболочки, должны удовлетворять некоторому условию. Это условие мы получим, приравняв линейные элементы  $d\tilde{s}^2$  и  $d\bar{s}^2$  поверхностей  $\tilde{F}$  и  $\bar{F}$  в сечении, перпендикулярном ребру. Имеем

$$d\tilde{s}^2 = dr^2 + dz^2,$$

$$d\bar{s}^2 = (dr + du)^2 + (dz + dv)^2.$$

Отсюда

$$dr du + dz dv + \frac{1}{2} (du^2 + dv^2) = 0.$$

Обозначим через  $2\alpha$  угол между касательными плоскостями поверхности  $\tilde{F}$  вдоль ребра  $\tilde{\gamma}$ . Так как геодезические кривизны ребра  $\tilde{\gamma}$  по поверхности  $\tilde{F}$  отличаются только знаком при подходе к  $\tilde{\gamma}$  с двух сторон, то соприкасающаяся плоскость ребра образует с касательными плоскостями поверхности одинаковые углы, равные  $\alpha$ . В предположении малости угла  $\alpha$  соотношение между перемещениями  $u$ ,  $v$  можно упростить. Именно, замечая, что

$$\left| \frac{dz}{dr} \right| \simeq \alpha \text{ и } u'^2 \ll |u'|.$$

можем записать это соотношение в следующем виде:

$$u' \pm \alpha v' + \frac{1}{2} v'^2 = 0.$$

Здесь знак «+» надо брать в одной полукрестности, а в другой — знак «-».

Будем говорить, что поверхности  $F$  и  $\tilde{F}$  в соответствующих по изометрии точках  $P$  и  $\tilde{P}$  одинаково ориентированы, если обходы этих точек, соответствующие по изометрии, образуют с направлением внешней нормали одновременно правый (или левый) винт. Если же для одной поверхности

будет правый винт, а для другой левый, то мы будем говорить, что в таких точках поверхности ориентированы противоположно. Так как при переходе через ребро поверхности  $\tilde{F}$  направление выпуклости изменяется, то в одной полуокрестности ребра поверхности  $F$  и  $\tilde{F}$  ориентированы одинаково, а в другой — противоположно. Условимся называть внешней ту полуокрестность, в которой поверхности ориентированы одинаково, и внутренней — ту, в которой они ориентированы противоположно.

Выберем теперь направление оси  $z$  цилиндрической системы координат так, чтобы соотношение между перемещениями  $u$ ,  $v$  во внешней полуокрестности было

$$u' + \alpha v' + \frac{v'^2}{2} = 0.$$

При этом, естественно, во внутренней полуокрестности будет

$$u' - \alpha v' + \frac{v'^2}{2} = 0.$$

Пусть теперь  $k$  — нормальная кривизна исходной поверхности в направлении, перпендикулярном ребру ( $k > 0$ ),  $k_e$  — нормальная кривизна поверхности  $\tilde{F}$  в соответствующем направлении со стороны внешней полуокрестности ребра  $\tilde{\gamma}$  ( $k_e > 0$ ) и  $k_l$  — нормальная кривизна поверхности  $\tilde{F}$  тоже в направлении, перпендикулярном  $\tilde{\gamma}$ , но со стороны внутренней полуокрестности ( $k_l < 0$ ). Тогда величина  $\Delta k$ , которая входит в формулу для  $\bar{U}''$ , во внешней полуокрестности равна  $k - k_e$ , и  $k - k_l$  — во внутренней.

Выражение для энергии деформации  $\bar{U}''$  целесообразно преобразовать следующим образом:

$$\bar{U}'' = \frac{D}{2} \int_{-\bar{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} v''^2 ds + \frac{D'}{2} \int_{-\bar{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} \frac{u^2}{\rho^2} ds + D \int_{-\bar{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} \Delta k v'' ds + D\bar{\varepsilon} (\Delta k)^2.$$

Последнее слагаемое в этом выражении мы отбросим сразу, предполагая малой ширину  $2\bar{\varepsilon}$  окрестности ребра, в которой ведутся наши рассуждения. Обратимся к третьему слагаемому. Так как функция  $v'$  терпит разрыв на ребре (то есть при

$s = 0$ ), то

$$\int_{-\bar{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} \Delta k v'' ds = -\Delta k_e v'(+0) + \Delta k_l v'(-0) + \\ + \Delta k_e v'(\bar{\varepsilon}) - \Delta k_l v'(-\bar{\varepsilon}).$$

Последние два слагаемых могут быть опущены, так как  $v'(s)$  неограниченно убывает при удалении от ребра. Что касается первых двух слагаемых, то при малом  $\alpha$  их можно считать равными  $-\alpha \Delta k_e$  и  $-\alpha \Delta k_l$ . Принимая все это во внимание, можем записать выражение для энергии деформации в следующей форме:

$$\bar{U}'' = \frac{D}{2} \int_{-\bar{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} v''^2 ds + \frac{D'}{2} \int_{-\bar{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} \frac{u^2}{\rho^2} ds - D\alpha(\Delta k_e + \Delta k_l).$$

Если сюда ввести значения  $\Delta k_e$  и  $\Delta k_l$ , то получим

$$\bar{U}'' = \frac{D}{2} \int_{-\bar{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} v''^2 ds + \frac{D'}{2} \int_{-\bar{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} \frac{u^2}{\rho^2} ds + D\alpha(-2k + k_e + k_l).$$

Найденное нами выражение для энергии деформации  $\bar{U}''$  в окрестности ребра зависит от двух функций  $u$  и  $v$ , связанных соотношением

$$u' \pm \alpha v' + \frac{v'^2}{2} = 0.$$

*Мы определим эти функции, а с ними и энергию деформации, минимизируя функционал  $\bar{U}''(u, v)$ .\**

Введем вместо переменных  $u, v, s$  новые переменные  $\bar{u}, \bar{v}$  и  $\bar{s}$ , полагая

$$\bar{u} = \frac{u}{\varepsilon \rho \alpha^2}, \quad \bar{v} = \frac{v'}{\alpha}, \quad \bar{s} = \frac{s}{\rho \varepsilon},$$

\*) Это вытекает из общего вариационного принципа, к которому сводится решение задачи об упругом равновесии оболочки. Соответствующая задача нами расчленяется на две части: определение формы оболочки вблизи ребер и последующее определение положения самих ребер.

$$\varepsilon^4 = \frac{\delta^2}{12\rho^2\alpha^2}.$$

Замечая, что

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D' = \frac{E\delta}{1-\nu^2},$$

для энергии деформации  $\bar{U}''$  новых переменных получим следующее выражение:

$$\bar{U}'' = \frac{E\delta^{5/2}\alpha^{3/2}}{12^{3/4}(1-\nu^2)\rho^{1/2}} J + Da(-2k + k_e + k_l),$$

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\bar{\varepsilon}^*}^{\bar{\varepsilon}^*} (v'^2 + u^2) ds,$$

$$\bar{\varepsilon}^* = \frac{\bar{\varepsilon}}{\rho\varepsilon}.$$

Черта над обозначениями новых переменных для простоты записи опущена.

Соотношение между перемещениями в новых переменных принимает вид

$$u' \pm v + \frac{1}{2} v^2 = 0.$$

Пределы интегрирования  $\pm \bar{\varepsilon}^*$  в выражении для  $J$  зависят от параметра  $\varepsilon$ , причем, когда  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\bar{\varepsilon}^* \rightarrow \infty$ . В связи с этим, ограничиваясь случаем таких оболочек и их деформаций, для которых этот параметр мал, заменим пределы интегрирования в  $J$  на  $\pm \infty$ :

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (v'^2 + u^2) ds.$$

Теперь задача по определению  $u$ ,  $v$  и энергии деформации  $\bar{U}''$  сводится к задаче на минимум для функционала  $J$  при неголономной связи

$$u' \pm v + \frac{v^2}{2} = 0.$$

Для того чтобы наша вариационная задача стала вполне определенной, мы должны еще поставить граничные условия для варьируемых функций  $u$  и  $v$ . Эти условия естественно вытекают из того, что поверхность  $\bar{F}$  вдали от ребра достаточно близка к  $\tilde{F}$ . Поэтому полагаем

$$u(-\infty) = u(\infty) = 0, \quad v(-\infty) = v(\infty) = 0.$$

Пусть  $J_0$  — минимум функционала  $J$ . Тогда энергия деформации  $\bar{U}''$  определяется по формуле

$$\bar{U}'' = \frac{E\delta^{3/2}\alpha^{3/2}J_0}{12^{3/4}(1-\nu^2)\rho^{1/2}} + D\alpha(-2k + k_e + k_l).$$

Энергия деформации во всей окрестности ребра  $\tilde{\gamma}$  получается интегрированием этого выражения по дуге кривой  $\tilde{\gamma}$ . Заметим, что найденное выражение энергии деформации зависит только от геометрических характеристик поверхности  $\tilde{F}$  на ребре  $\tilde{\gamma}$ .

Определение состояний упругого равновесия оболочки, находящейся под действием данной нагрузки, как известно, сводится к решению задачи на экстремум функционала

$$W = U - A,$$

где  $U$  — энергия упругой деформации оболочки,  $A$  — производимая внешней нагрузкой работа при этой деформации. Оболочка под действием данной нагрузки принимает такую форму  $\bar{F}$ , которая сообщает функционалу  $W$  стационарное значение.

Для энергии упругой закритической деформации мы нашли выражение

$$U = U'(\tilde{F}) + U''(\tilde{F}),$$

зависящее только от поверхности  $\tilde{F}$ , изометричной  $F$  и близкой к  $\bar{F}$ . Ввиду близости поверхности  $\tilde{F}$  к  $\bar{F}$  можно считать, что производимая внешней нагрузкой работа  $A$  определяется деформацией  $F$  в  $\tilde{F}$ , т. е. что

$$A(\bar{F}) \simeq A(\tilde{F}).$$

Теперь мы можем сформулировать следующий принцип А.

Значительная закритическая деформация упругой оболочки под действием данной нагрузки близка к той форме изометрического преобразования исходной поверхности, которая сообщает стационарное значение функционалу

$$W = U(\tilde{F}) - A(\tilde{F}).$$

Этот функционал определен на изометрических преобразованиях срединной поверхности оболочки. Слагаемое  $U(\tilde{F})$  определяется следующей формулой:

$$U(\tilde{F}) = \frac{E\delta^3}{24(1-\nu^2)} \int_{\tilde{F}} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2) d\sigma + \\ + cE\delta^{3/2} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{\alpha^{3/2}}{\rho^{1/2}} ds_{\tilde{\gamma}} + \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} \int_{\tilde{\gamma}} \alpha(-2k + k_e + k_i) ds_{\tilde{\gamma}}.$$

Здесь  $\Delta k_1$  и  $\Delta k_2$  — главные изменения нормальных кривизн при переходе от исходной формы оболочки  $F$  к изометрическому преобразованию  $\tilde{F}$ ;  $2\alpha$  — угол между касательными плоскостями поверхности  $\tilde{F}$  вдоль ребра (ребер)  $\tilde{\gamma}$ ;  $\rho$  — радиус кривизны кривой  $\tilde{\gamma}$ ;  $k_e$  и  $k_i$  — нормальные кривизны поверхности  $\tilde{F}$  в направлении, перпендикулярном ребру  $\tilde{\gamma}$ ,  $k$  — нормальная кривизна поверхности  $F$  в соответствующем направлении;  $\delta$  — толщина оболочки,  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Постоянная

$$c = \frac{J_0}{12^{3/4}(1-\nu^2)}.$$

Интегрирование в первом слагаемом выполняется по площади поверхности  $\tilde{F}$ , а в остальных двух слагаемых — по дуге ребер  $\tilde{\gamma}$ .

Слагаемое  $A(\tilde{F})$  представляет собой производимую внешней нагрузкой работу при деформации оболочки в форму  $\tilde{F}$  и вычисляется обычным образом.

Предлагаемый принцип определяет не только форму оболочки при закритической деформации, но также и максимальные напряжения в ее материале при этой деформации. Действительно, максимальные напряжения возникают, очевидно, в окрестности ребра и обусловлены либо изгибом



в плоскости, перпендикулярной ребру, либо растяжением (сжатием) срединной поверхности в перпендикулярном направлении. В исходных переменных  $u$ ,  $v$  для максимального напряжения  $\sigma'$  от изгиба в плоскости, перпендикулярной ребру, имеем

$$\sigma' \simeq \frac{E\delta}{2} \max |v''|.$$

Максимальные напряжения растяжения (сжатия) срединной поверхности в направлении ребра будут

$$\sigma'' \simeq E \max \left| \frac{u}{\rho} \right|.$$

Переходя в этих формулах к безразмерным переменным  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ , получим

$$\sigma' = c'E \frac{\delta^{1/2} \alpha^{3/2}}{\rho^{1/2}},$$

$$\sigma'' = c''E \frac{\delta^{1/2} \alpha^{3/2}}{\rho^{1/2}},$$

где  $c'$  и  $c''$  — постоянные, определяемые с помощью функций  $u$ ,  $v$ , реализующих минимум функционала  $J$ , по формулам

$$c' = \frac{12^{1/4}}{2} \max |v'|,$$

$$c'' = \frac{\max |u|}{12^{1/4}}.$$

Значения этих постоянных, а также постоянную  $c$  в функционале  $W$  мы найдем в следующем пункте.

**3. Решение вариационной задачи для функционала  $J$ . Определение постоянных  $c$ ,  $c'$  и  $c''$ .** Рассматривая вопрос об энергии упругой закритической деформации оболочки, мы пришли к задаче на минимум функционала

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (v'^2 + u^2) ds$$

при неголономной связи

$$u' \pm v + \frac{v^2}{2} = 0$$

и следующих граничных условиях для варьируемых функций:

$$u(-\infty) = u(\infty) = 0, \quad v(-\infty) = v(\infty) = 0.$$

По смыслу задачи решение ее надо искать среди функций  $v$ , имеющих разрыв при  $s = 0$  с условием

$$v(+0) - v(-0) = -2.$$

Это условие вытекает из соответствующего условия для первоначального переменного  $v$ , где оно имеет вид

$$v'(+0) - v'(-0) = -2a.$$

Представляется естественным искать решение нашей вариационной задачи в классе нечетных функций  $u$  и  $v$ . Тогда

$$J = \int_0^{\infty} (v'^2 + u^2) ds.$$

Связь принимает вид

$$u' + v + \frac{v^2}{2} = 0.$$

Краевые условия будут

$$u(0) = 0, \quad u(\infty) = 0, \quad v(0) = -1, \quad v(\infty) = 0.$$

Так как  $v(s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \infty$ , то при больших  $s$  связь между  $u$  и  $v$  можно упростить, отбросив несущественное слагаемое  $v^2/2$ . Тогда получим

$$u' + v = 0.$$

Если исключить функцию  $v$ , выразив ее через  $u$  с учетом связи

$$u' + v + \frac{v^2}{2} = 0,$$

то функционал  $J$  примет вид

$$J = \int_0^{\infty} f(u, u', u'') ds.$$

При больших  $s$

$$f \simeq u'^2 + u^2.$$

Поэтому уравнение Эйлера для нашей вариационной задачи при больших  $s$  имеет вид

$$u^{IV} + u = 0.$$

Его общее решение

$$u = \sum_k c_k e^{\omega_k s},$$

где  $\omega_k$  — корни характеристического уравнения

$$\omega^4 + 1 = 0.$$

Ввиду условия  $u(\infty) = 0$ , в выражении для  $u$  должны быть только слагаемые, соответствующие корням  $\omega_k$  с отрицательной вещественной частью, то есть корням

$$\omega_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i), \quad \omega_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i).$$

Таким образом, при больших  $s$

$$u = c_1 e^{\omega_1 s} + c_2 e^{\omega_2 s},$$

$$v = -u' = -c_1 \omega_1 e^{\omega_1 s} - c_2 \omega_2 e^{\omega_2 s}.$$

Принимая во внимание найденное асимптотическое представление (при больших  $s$ ) для функций  $u$ ,  $v$ , будем искать  $v$  на всей полуоси в виде

$$v = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_{11} x^2 + 2\alpha_{12} xy + \alpha_{22} y^2 +$$

где для краткости обозначено

$$x = e^{\omega_1 s}, \quad y = e^{\omega_2 s}.$$

Составим уравнение Эйлера для функции  $v$ . Согласно методу Эйлера — Лагранжа, решение задачи на минимум для функционала  $J$  при заданной неголономной связи эквивалентно решению задачи на безусловный экстремум для функционала

$$J' = \int_0^{\infty} \left( u^2 + v'^2 + \lambda(s) \left( u' + v + \frac{v^2}{2} \right) \right) ds.$$

Уравнения Эйлера для этого функционала будут

$$\lambda(1 + v) - 2v'' = 0, \quad 2u - \lambda' = 0,$$

К этим двум уравнениям надо присоединить уравнение

$$u' + v + \frac{v^2}{2} = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение в пределах  $(0, \infty)$  и замечая, что  $u(\infty) = 0$ , получим

$$u = \int_s^{\infty} \left( v + \frac{v^2}{2} \right) ds.$$

Из уравнения

$$\lambda(1 + v) - 2v'' = 0$$

следует, что  $\lambda(\infty) = 0$ , так как  $v(\infty) = 0$  и, следовательно, можно считать  $v''(\infty) = 0$ . Подставляя полученное интегральное представление для  $u$  в уравнение

$$2u - \lambda' = 0,$$

интегрируя его в пределах  $(s, \infty)$ , получим

$$\lambda = -2 \int_s^{\infty} \int_t^{\infty} \left( v + \frac{v^2}{2} \right) dt ds.$$

А теперь с помощью уравнения

$$\lambda(1 + v) - 2v'' = 0$$

получаем искомое интегро-дифференциальное уравнение для  $v$

$$v'' + (1 + v) \int_s^{\infty} \int_t^{\infty} \left( v + \frac{v^2}{2} \right) dt ds = 0.$$

Подставляя в это уравнение выражение для  $v$  в виде ряда по степеням  $x, y$ , будем иметь

$$\begin{aligned} x \left( \alpha_1 \omega_1^2 + \frac{\alpha_1}{\omega_1^2} \right) + y \left( \alpha_2 \omega_2^2 + \frac{\alpha_2}{\omega_2^2} \right) + \\ + x^2 \left( 4\alpha_{11} \omega_1^2 + \frac{1}{4\omega_1^2} \left( \alpha_{11} + \frac{\alpha_1^2}{2} \right) + \frac{\alpha_1^2}{\omega_1^2} \right) + \dots = 0. \end{aligned}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при  $x, y, x^2, \dots$ , получим бесконечную систему уравнений для  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots$

Первые два уравнения этой системы удовлетворяются тождественно, так как  $\omega_1$  и  $\omega_2$  суть корни уравнения

$$\omega^4 + 1 = 0.$$

Остальные уравнения позволяют определить  $\alpha_{11}$ , в зависимости от  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Выразив таким образом коэффициенты разложения через  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , воспользуемся для определения последних крайними условиями:  $u(0) = 0$ ,  $v(0) = -1$ . Имеем

$$u + \frac{\alpha_1}{\omega_1} x + \frac{\alpha_2}{\omega_2} y + \frac{x^2}{2\omega_1} \left( \alpha_{11}(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{\alpha_1^2}{2} \right) + \dots = 0.$$

Отсюда, полагая  $s = 0$ , получим

$$\frac{\alpha_1}{\omega_1} + \frac{\alpha_2}{\omega_2} + \frac{1}{2\omega_1} \left( \alpha_{11}(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{\alpha_1^2}{2} \right) + \dots = 0.$$

Второе уравнение для  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  получается из краевого условия  $v(0) = -1$ :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_{11}(\alpha_1, \alpha_2) + \dots = -1.$$

Полученную систему уравнений для  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  удобно представить в виде

$$\frac{\alpha_1}{\omega_1} + \frac{\alpha_2}{\omega_2} + P(\alpha_1, \alpha_2) = 0,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + Q(\alpha_1, \alpha_2) = -1.$$

Для решения этой системы можно воспользоваться методом последовательных приближений. Первое приближение получается решением системы

$$\frac{\alpha_1^{(1)}}{\omega_1} + \frac{\alpha_2^{(1)}}{\omega_2} = 0, \quad \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} = -1.$$

Для получения второго приближения подставим найденные значения  $\alpha_1^{(1)}$  и  $\alpha_2^{(1)}$  в  $P$  и  $Q$  и решаем систему

$$\frac{\alpha_1^{(2)}}{\omega_1} + \frac{\alpha_2^{(2)}}{\omega_2} + P(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}) = 0,$$

$$\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} + Q(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}) = -1.$$

Аналогично находятся последующие приближения.

Описанным способом, ограничиваясь вторым приближением, найдено значение

$$J_0 \simeq 1,2.$$

Для соответствующих функций  $u$ ,  $v$  будет

$$\max |v'| \simeq 1, \quad \max |u| \simeq 0,5.$$

Мы обращаем внимание на эти значения потому, что с их помощью определяются постоянные  $c'$  и  $c''$  в формулах для максимальных напряжений (п. 2).

В связи с рассмотрением вопроса об упруго-пластических закритических деформациях мы сейчас предложим другой способ решения вариационной задачи для функционала  $J$ . Это решение, приближенное по существу, будет основано на наглядных представлениях о характере деформации оболочки вблизи ребра, с изучением которой связана наша вариационная задача.

На рис. 3 справа (стр. 26) изображены сечение деформированной оболочки плоскостью, перпендикулярной к ребру, и сечение той же плоскостью поверхности  $\tilde{F}$ , которая приближает форму оболочки. Новые переменные  $u$ ,  $v$ , которые мы теперь употребляем, представляют собой соответственно нормированное радиальное смещение точки поверхности  $\tilde{F}$  при деформации ее в  $\bar{F}$  и нормированный угол поворота касательной. Нормировка угла выполнена таким образом, что его значение в точке  $A$  ( $s = +0$ ) равно  $-1$ .

Исходя из представления о локальном характере деформации оболочки в зоне сильного изгиба, естественно предположить, что за точкой  $B$ , где  $v = 0$ , величина  $v$  остается малой и в дифференциальной связи переменных  $u$ ,  $v$  членом  $v^2/2$  можно пренебречь. Тогда связь примет вид

$$u' + v = 0.$$

Далее, очевидно, что максимум изгиба деформированной оболочки должен достигаться в непосредственной близости от точки  $A$ . Отсюда следует, что вблизи точки  $A$  значение  $v'$ , определяющее величину изгиба, изменяется мало, и естественно считать  $v'$  постоянной в некоторой окрестности точки  $A$ .

Принимая во внимание указанные два соображения, будем искать минимум функционала  $J$  на множестве функций  $u$ ,  $v$ ,

удовлетворяющих условиям

$$1. \text{ При } s \leq \sigma \quad u' + v + \frac{v^2}{2} = 0, \quad v' = \text{const.}$$

$$2. \text{ При } s \geq \sigma \quad u' + v = 0.$$

Здесь  $\sigma$  — параметр, подлежащий варьированию. Минимум функционала  $J$  при заданном  $\sigma$  будет известной функцией от  $\sigma$ :  $J_{\min} = J(\sigma)$ . Для определения величины  $J_0$  минимизируем эту функцию по  $\sigma$ :

$$J_0 = \min_{\sigma} J(\sigma).$$

Найдем функцию  $J(\sigma)$ . Полагая при  $s \leq \sigma$

$$v' = \frac{1}{\lambda} = \text{const.},$$

после интегрирования получим

$$v = \frac{s}{\lambda} + \text{const.}$$

Так как  $v = -1$  при  $s = 0$ , то

$$v = \frac{s}{\lambda} - 1.$$

Параметр  $\lambda$  имеет простой смысл. Именно, это такое значение  $s$ , при котором  $v$  обращается в нуль, то есть  $\lambda = \sigma$ . Таким образом, при  $s \leq \sigma$  имеем

$$v(s) = \frac{s - \sigma}{\sigma}.$$

Из уравнения

$$u' + v + \frac{v^2}{2} = 0$$

находим функцию  $u(s)$  при  $s \leq \sigma$ :

$$u = -\frac{1}{2\sigma}(s - \sigma)^2 - \frac{1}{6\sigma^2}(s - \sigma)^3 + \text{const.}$$

Постоянная интегрирования определяется краевым условием  $u(0) = 0$ , и она равна  $\sigma/3$ . Таким образом, при  $s \leq \sigma$  будет

$$u = -\frac{1}{2\sigma}(s - \sigma)^2 - \frac{1}{6\sigma^2}(s - \sigma)^3 + \frac{\sigma}{3}.$$

Значения функций  $u$ ,  $v$  на конце  $\sigma$  отрезка  $(0, \sigma)$  соответственно равны  $\frac{\sigma}{3}$  и  $0$  и они представляют собой начальные значения для варьируемых функций  $u$ ,  $v$  на оставшейся части полуоси  $(\sigma, \infty)$ .

Так как при  $s \geq \sigma$  по предположению

$$u' + v = 0,$$

то функционал  $J$  можно представить в виде

$$J = \int_0^{\sigma} (v'^2 + u^2) ds + \int_{\sigma}^{\infty} (u'^2 + u^2) ds.$$

Функция  $u(s)$ , реализующая минимум функционала на полуоси  $(\sigma, \infty)$ , удовлетворяет уравнению Эйлера

$$u^{IV} + u = 0.$$

Его общее решение, исчезающее на бесконечности, допускает представление

$$u = c_1 e^{\omega_1 s} + c_2 e^{\omega_2 s},$$

$\omega_1, \omega_2$  — корни характеристического уравнения

$$\omega^4 + 1 = 0$$

с отрицательной вещественной частью, то есть

$$\omega_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i), \quad \omega_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i).$$

Постоянные  $c_1$  и  $c_2$  определяются условиями сопряжения функций  $u$ ,  $v$  при  $s = \sigma$ . Имеем

$$u(\sigma) = c_1 e^{\omega_1 \sigma} + c_2 e^{\omega_2 \sigma} = \frac{\sigma}{3},$$

$$v(\sigma) = -u'(\sigma) = -c_1 \omega_1 e^{\omega_1 \sigma} - c_2 \omega_2 e^{\omega_2 \sigma} = 0.$$

Отсюда

$$c_1 = -\frac{\sigma \omega_1}{3\sqrt{2}} e^{-\omega_1 \sigma}, \quad c_2 = -\frac{\sigma \omega_2}{3\sqrt{2}} e^{-\omega_2 \sigma}.$$

Вычислим теперь значение  $J(\sigma)$ . При  $s \leq \sigma$  будет

$$\vartheta = \frac{s - \sigma}{\sigma},$$

$$\# = -\frac{1}{2\sigma} (s - \sigma)^2 - \frac{1}{6\sigma^3} (s - \sigma)^3 + \frac{\sigma}{3}.$$



Отсюда

$$\int_0^{\sigma} (v'^2 + u^2) ds = \frac{1}{\sigma} + \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{7 \cdot 36} \right) \sigma^3.$$

При  $s \geq \sigma$  имеем

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\sigma}{3\sqrt{2}} (\omega_1 e^{\omega_1(s-\sigma)} + \omega_2 e^{\omega_2(s-\sigma)}), \\ v' &= -\frac{\sigma i}{3\sqrt{2}} (-\omega_1 e^{\omega_1(s-\sigma)} + \omega_2 e^{\omega_2(s-\sigma)}), \\ u^2 + v'^2 &= \frac{2\sigma^2}{9} e^{-V\sqrt{2}(s-\sigma)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int_{\sigma}^{\infty} (u^2 + v'^2) ds = \frac{2\sigma^2}{9\sqrt{2}}.$$

Таким образом,

$$J(\sigma) = \frac{1}{\sigma} + \frac{\sqrt{2}\sigma^2}{9} + \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{7 \cdot 36} \right) \sigma^3.$$

Минимизируя  $J(\sigma)$  по  $\sigma$ , находим  $J_0$ :

$$J_0 = \min_{(\sigma)} J(\sigma) \simeq 1,15.$$

Найденное значение  $J_0$ , по-видимому, близко к истинному. Во всяком случае, применение электронных вычислительных машин для определения  $J_0$  дало для него значение

$$J_0 = 1,1156,$$

причем первые три знака в этом выражении гарантированы.

Вычислим теперь значения постоянных  $c$ ,  $c'$  и  $c''$ , введенных в п. 2. Имеем

$$c = \frac{J_0}{12^{3/4} (1 - v^2)}.$$

Полагая  $v = 0,3$  и  $J_0 = 1,11$ , находим

$$c \simeq 0,19.$$

Постоянная

$$c' = \frac{12^{1/4}}{2} \max |v'|,$$

Полагая  $\max |v'| = 1$ , будем иметь

$$c' \simeq 0,9.$$

Постоянная

$$'' = \frac{\max |u|}{12^{1/4}}.$$

При  $\max |u| = 0,5$

$$c'' \simeq 0,27.$$

Сравним значения максимальных напряжений  $\sigma'$  и  $\sigma''$  соответственно от изгиба и растяжения (сжатия) в срединной поверхности оболочки. Имеем (п. 2)

$$\sigma' = 0,9E \frac{\delta^{1/2} \alpha^{3/2}}{\rho^{1/2}}, \quad (*)$$

$$\sigma'' = 0,27E \frac{\delta^{1/2} \alpha^{3/2}}{\rho^{1/2}}.$$

Мы видим, что максимальные напряжения от изгиба гораздо больше, чем напряжения растяжения (сжатия) в срединной поверхности. Отсюда следует, что расчет на прочность оболочки при закритических деформациях следует вести по напряжениям изгиба в окрестности ребер. Эти напряжения определяются по формуле (\*).

## § 2. Закритические деформации строго выпуклых оболочек под внешним давлением

Применение принципа А, сформулированного в § 1, мы проиллюстрируем в этом параграфе на примере строго выпуклых оболочек, находящихся под внешним давлением. Мы рассмотрим два способа нагружения оболочки: сосредоточенной силой, нормальной к поверхности (в точке ее приложения), и равномерным внешним давлением. Результаты теоретического рассмотрения сравним с данными соответствующих экспериментов над оболочками сферической формы.

**1. Определение основных величин в случае зеркального выпучивания малых областей.** Применение принципа А при изучении закритических упругих состояний оболочки предполагает определение ряда величин изометрического преобразования срединной поверхности. Имея в виду ближайшие

приложения, мы определим такие величины в случае зеркального выпучивания малых областей.

Как известно, форма регулярной строго выпуклой поверхности в достаточно малой окрестности данной точки  $P$  хорошо приближается некоторым эллиптическим параболоидом, который называется соприкасающимся. Если принять касательную плоскость в точке  $P$  за плоскость  $xy$ , а главные направления поверхности в этой точке за направления координатных осей, то уравнение соприкасающегося параболоида будет иметь вид

$$z = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2),$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — главные кривизны поверхности в точке  $P$ . Отсюда следует, что область зеркального выпучивания оболочки с центром выпучивания  $P$  при малой высоте выпучивания  $2h$  (прогиб в точке  $P$ ) задается неравенством

$$\frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2) \leq h.$$

и, следовательно, представляет собой эллипс с полуосями

$$a = \sqrt{\frac{2h}{k_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{2h}{k_2}}.$$

В связи с определением энергии упругой деформации при выпучивании нам понадобятся выражения для кривизны кривой, ограничивающей область выпучивания, и для нормальной кривизны поверхности. Найдем выражения для этих величин.

Граница выпучивания, как эллипс с полуосями  $a$ ,  $b$ , допускает параметрическое задание

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Пользуясь формулой для кривизны кривой, находим

$$\frac{1}{\rho} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}},$$

где  $\rho$  — радиус кривизны.

Определим нормальную кривизну поверхности в направлении границы выпучивания. Ввиду того, что область выпучивания мала, можно считать, что главные кривизны на границе выпучивания близки к  $k_1$  и  $k_2$  — главным кривизнам

в  $P$  (центре выпучивания), а главные направления близки к главным направлениям в  $P$ .

По формуле Эйлера нормальная кривизна в направлении, которое образует угол  $\vartheta$  с главным направлением, отвечающим кривизне  $k_1$ , равна

$$k_0 = k_1 \cos^2 \vartheta + k_2 \sin^2 \vartheta.$$

В рассматриваемом случае

$$\cos \vartheta = \frac{-a \sin t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2}}, \quad \sin \vartheta = \frac{b \cos t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2}}.$$

Поэтому нормальная кривизна поверхности в направлении границы выпучивания равна

$$k_n = k_1 \frac{a^2 \sin^2 t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} + k_2 \frac{b^2 \cos^2 t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t},$$

замечая, что

$$k_1 = \frac{2h}{a^2}, \quad k_2 = \frac{2h}{b^2},$$

получим

$$k_n = \frac{2h}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.$$

Нормальная кривизна в направлении, перпендикулярном границе выпучивания, равна

$$\bar{k}_n = k_1 \sin^2 \vartheta + k_2 \cos^2 \vartheta,$$

или, принимая во внимание выражения для  $\cos \vartheta$ ,  $\sin \vartheta$ ,  $k_1$  и  $k_2$ , получим

$$\bar{k}_n = 2h \frac{\frac{a^2}{b^2} \sin^2 t + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.$$

Определим угол  $\alpha$  между плоскостью кривой  $\gamma$ , ограничивающей область выпучивания, и касательными плоскостями поверхности. По формуле Менье

$$\rho k_n = \sin \alpha.$$

Для малых областей выпучивания, и, следовательно, малых  $\alpha$ , имеем

$$\alpha = \rho k_n.$$

Подставляя сюда найденные значения  $\rho$  и  $k_n$ , получим

$$\alpha = \frac{2h}{ab} (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2}.$$

Вычислим теперь  $U$  — энергию деформации оболочки. Она у нас состоит из двух частей —  $U_G$  и  $U_\gamma$ , где  $U_G$  — энергия изгиба по основной поверхности, а  $U_\gamma$  — энергия деформации в окрестности границы  $\gamma$  области выпучивания. Величина  $U_G$  определяется по формуле (стр. 25)

$$U_G = \frac{D}{2} \int \int (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2) d\sigma.$$

Здесь  $\Delta k_1$  и  $\Delta k_2$  — главные изменения нормальных кривизн при переходе от исходной формы к изометрическому преобразованию,

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$$

— жесткость оболочки на изгиб, а интегрирование выполняется по площади всей поверхности. В рассматриваемом случае зеркального выпучивания величины  $\Delta k_1$  и  $\Delta k_2$  в области выпучивания  $G$  равны нулю, а внутри этой области  $\Delta k_1 = 2k_1$ ,  $\Delta k_2 = 2k_2$ , где  $k_1$  и  $k_2$  — главные кривизны. Ввиду предположения о малости области выпучивания,  $k_1$  и  $k_2$  можно считать равными их значениям в центре выпучивания  $P$ . С учетом величины площади области выпучивания получим

$$U_G = \frac{\pi h}{3\sqrt{k_1 k_2}} \frac{E\delta^3}{(1-\nu^2)} (k_1^2 + k_2^2 + 2\nu k_1 k_2).$$

Здесь  $2h$  — высота выпучивания (нормальный прогиб в центре выпучивания  $P$ ),  $k_1$  и  $k_2$  — главные кривизны в  $P$ ,  $\delta$  — толщина оболочки,  $E$  — модуль упругости, а  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Вычислим теперь энергию деформации на  $\gamma$  — границе выпучивания. Для нее в § 1 получена формула (стр. 33)

$$U_\gamma = cE\delta^{3/2} \int_\gamma \frac{\alpha^{3/2}}{\rho^{1/2}} ds_\gamma + \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} \int_\gamma \alpha (-2k + k_e + k_i) ds_\gamma.$$

Здесь  $\alpha$  — угол между плоскостью кривой  $\gamma$  и касательными плоскостями деформированной поверхности,  $k$  — нормальная кривизна исходной поверхности в направлении, перпендикулярном границе выпучивания,  $k_e$  и  $k_i$  — нормальные кривизны изометрически преобразованной поверхности соответственно

со стороны внутренней и внешней полуокрестности границы выпучивания.

В случае зеркального выпучивания  $k_e = k$ ,  $k_i = -k$ . Таким образом, второе слагаемое в формуле для  $U_\gamma$  можно записать в виде  $-\frac{E\delta^3}{6(1-\nu^2)} \int_\gamma k\alpha ds_\gamma$ . Принимая во внимание полученные выше значения для нормальной кривизны  $k = \bar{k}_n$ , угла  $\alpha$  и замечая, что  $ds_\gamma = (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2} dt$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \int_\gamma k\alpha ds_\gamma &= \frac{4h^2}{ab} \int_0^{2\pi} \left( \frac{a^2}{b^2} \sin^2 t + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 t \right) dt = \\ &= \frac{4\pi h^2}{ab} \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, второе слагаемое в выражении для  $U_\gamma$  равно

$$-\frac{E\delta^3\pi h}{3(1-\nu^2)} (k_1^2 + k_2^2).$$

При  $\nu = 0$  оно отличается от выражения  $U_G$  только знаком.

Мы предполагаем, что более глубокий анализ упругого состояния оболочки у границы выпучивания должен привести к полной компенсации этого члена энергией  $U_G$  и при  $\nu \neq 0$ . Поэтому полную энергию деформации будем определять по формуле

$$U = cE\delta^{3/2} \int_\gamma \frac{\alpha^{3/2}}{\rho^{1/2}} ds_\gamma.$$

Подставляя в эту формулу найденные выше значения  $\alpha$  и  $\rho$ , получим

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{\alpha^{3/2}}{\rho^{1/2}} ds_\gamma &= \frac{(2h)^{3/2}}{a^2 b^2} \int_0^{2\pi} (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t) dt = \\ &= \frac{(2h)^{3/2}}{a^2 b^2} \pi (a^2 + b^2) = \pi (2h)^{3/2} (k_1 + k_2). \end{aligned}$$

Отсюда

$$U = \pi cE\delta^{3/2} (2h)^{3/2} (k_1 + k_2).$$

Оценим величину погрешности, которую мы допускаем при  $\nu \neq 0$ , отбрасывая в выражении энергии деформации

$$\Delta U = \frac{\pi h}{3 \sqrt{k_1 k_2}} \frac{E \delta^3}{1 - \nu^2} (2\nu k_1 k_2).$$

Возьмем для примера сферическую оболочку радиуса  $R$ . Для такой оболочки найденное нами значение энергии деформации равно

$$U = 2\pi c E \delta^{3/2} (2h)^{3/2} \frac{1}{R},$$

отброшенный член равен

$$\Delta U = \frac{\pi h}{3} \frac{E \delta^3}{1 - \nu^2} 2\nu \frac{1}{R},$$

и относительная погрешность равна

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\nu}{6(1 - \nu^2)} \frac{c}{E} \sqrt{\frac{\delta}{2h}}.$$

Так как мы рассматриваем значительные деформации ( $2h/\delta$  велико), то отсюда видно, что при  $\nu \neq 0$  вносимая нашим предположением погрешность невелика, даже если это предположение и неверно.

Определим максимальные напряжения  $\sigma$  в материале оболочки при выпучивании. Такие напряжения возникают от изгиба на границе выпучивания и определяются по формуле (§ 1, п. 2)

$$\sigma = c' E \frac{\delta^{1/2} \alpha^{3/2}}{\rho^{1/2}}.$$

Подставляя сюда значения  $\alpha$  и  $\rho$ , получим

$$\sigma = c' E \delta^{1/2} (2h)^{1/2} \sqrt{k_1 k_2}.$$

Существенно заметить, что эти напряжения постоянны границы выпучивания.

Итак, при зеркальном выпучивании малой области строго выпуклой оболочки энергия деформации  $U$  определяется по формуле

$$U = \pi c E \delta^{3/2} (2h)^{3/2} (k_1 + k_2), \quad c \simeq 0,19.$$

Максимальные, возникающие от изгиба на границе выпучивания напряжения равны

$$\sigma = c' E \delta^{1/2} (2h)^{1/2} \sqrt{k_1 k_2}, \quad c' \simeq 0,9,$$

**2. Закритические деформации оболочек под действием сосредоточенной силы.** Пусть строго выпуклая оболочка, жестко закрепленная по краю, находится под действием сосредоточенной силы  $f$ , нормальной к поверхности оболочки в точке приложения. Если эта сила вызывает значительную деформацию, то определение упругого состояния оболочки сводится к задаче на экстремум функционала  $W = U - A$ , который определен и рассматривается на изометрических преобразованиях исходной формы оболочки. Мы будем предполагать, что выпучивание оболочки, вызванное действием силы  $f$ , охватывает выпуклую область. В этом случае, как показано в п. 1 § 1, класс изометрических преобразований, на которых надо рассматривать нашу вариационную задачу, сужается до зеркального выпучивания.

В случае зеркального выпучивания для функционала  $U$  в п. 1 получено следующее выражение:

$$U = \pi c E \delta^{3/2} (2h)^{1/2} (k_1 + k_2).$$

Предполагая, что точка приложения силы  $f$  является центром выпучивания, будем иметь для функционала  $A$ , представляющего собой работу, производимую силой  $f$  при деформации оболочки, формулу  $A = 2fh$ .

Из условия стационарности  $d(U - A) = 0$  функционала  $W$  получаем зависимость между величиной действующей силы  $f$  и деформацией  $(2h)$ , которую она вызывает. Имеем

$$dW = 3\pi c E \delta^{3/2} (2h)^{1/2} (k_1 + k_2) dh - 2f dh = 0.$$

Отсюда

$$f = \frac{3\pi c}{2} E \delta^{3/2} (k_1 + k_2) \sqrt{2h}.$$

Из этой формулы видно, что при увеличении деформации воспринимаемая оболочкой нагрузка  $f$  растет. Это указывает на устойчивость состояний равновесия оболочки под действием сосредоточенной нагрузки.

К выводу об устойчивости состояний равновесия можно прийти и другим путем, рассматривая вторую вариацию функционала  $W$ . Имеем

$$d^2W = 3\pi c E \delta^{3/2} (k_1 + k_2) \frac{1}{\sqrt{2h}} dh^2 > 0.$$

А это значит, что состояние равновесия устойчиво,



Рассмотрим особо случай сферической оболочки. Для сферической оболочки радиуса  $R$  имеем  $k_1 = k_2 = 1/R$ , и формула, устанавливающая зависимость между действующей силой  $f$  и прогибом  $2h$ , который она вызывает, принимает вид

$$f = 3\pi c E \delta^{3/2} \sqrt{2h} \frac{1}{R}.$$

Если радиус круга выпучивания обозначить через  $\rho$  и заметить, что  $2h \simeq \rho^2/R$ , то эту зависимость можно еще записать так

$$f = 3\pi c E \frac{\delta^{3/2}}{R^{1/2}} \rho.$$

Таким образом, зависимость радиуса круга выпучивания от действующей силы  $f$  является линейной.

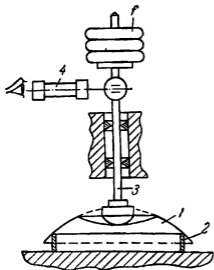


Рис. 4.

Полученная зависимость прогиба  $2h$  от действующей силы  $f$  для сферических оболочек была подвергнута экспериментальной проверке\*). Установка, на которой проводился соответствующий эксперимент, устроена довольно просто и схематически представлена на рис. 4.

Испытуемый сферический сегмент 1 свободно опирается на жесткое кольцо 2. Действие груза  $f$ , состоящего из калиброванных по весу шайб, через вертикальный стержень 3

передается на поверхность сегмента. Чтобы исключить пластические деформации сегмента в непосредственной близости точки приложения сосредоточенной силы, наконечник стержня,

\*) Эти эксперименты, так же как и другие, описанные ниже, проведены автором при участии сотрудников: М. М. Пуголовка, Ю. И. Кравецкого, Н. С. Сухленка, Н. И. Котова, В. А. Чистюхина, А. Н. Педоренко. Эксперименты проводились в Физико-техническом институте низких температур АН УССР.

контактирующий с поверхностью сегмента, выполнен со сравнительно малой, но большей, чем у сегмента, кривизной. Вертикальные перемещения стержня, то есть прогибы оболочки ( $2h$ ), регистрировались с помощью точного оптического прибора 4, позволяющего измерять эти перемещения с точностью до  $10^{-3}$  мм.

Эксперимент проводился на серии медных оболочек радиуса  $R=150$  мм с различной толщиной  $\delta$  от 0,03 до 0,10 мм. Оболочки получались путем напыления меди в вакууме на стальную подложку сферической формы. Сферичность подложки, а следовательно, и получаемых оболочек, была выдержана с высокой (оптической) точностью. Специальные режимы напыления позволили получать образцы, обладающие высоким пределом упругости. Это существенно для экспериментов с закритическими деформациями, так как напряжения в зоне сильного местного изгиба (на границе выпучивания) при таких деформациях весьма значительны.

На рис. 5 представлены графики теоретической зависимости прогибов оболочки под действием сосредоточенной силы

$$2h = \frac{R^2}{9\pi^2 c^2 E^2 \delta^5} f^2$$

для сферических оболочек радиуса  $R=150$  мм и различных толщин  $\delta=0,037, 0,048$  и  $0,056$  мм. Графики построены с учетом фактического значения модуля упругости  $E$ , который определялся путем специального испытания на изгиб плоских образцов, получаемых напылением в сходных условиях.

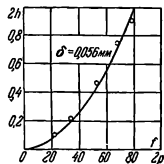
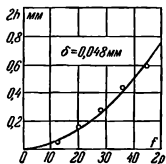
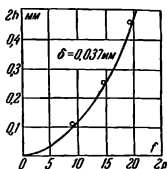


Рис. 5.

Отдельные точки на графиках дают экспериментальные значения прогибов  $2h$  при различных значениях действующей силы  $f$ . Мы видим, что теория и опыт в рассматриваемом вопросе находятся в удовлетворительном соответствии.

Теоретическое и экспериментальное исследование вопроса о деформациях строго выпуклой оболочки под действием сосредоточенной силы мы подытожим следующим выводом.

*Прогиб  $2h$  строго выпуклой оболочки под действием сосредоточенной силы  $f$ , нормальной к поверхности оболочки, определяется соотношением*

$$f = \frac{3\pi c}{2} E \delta^{3/2} (k_1 + k_2) \sqrt{2h},$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — главные кривизны оболочки в точке приложения силы,  $\delta$  — толщина оболочки, а постоянная  $c \simeq 0,19$ . В частности, для сферической оболочки радиуса  $R$

$$f = 3\pi c E \delta^{3/2} \frac{\sqrt{2h}}{R}.$$

**8. Закритические деформации строго выпуклой оболочки под внешним давлением.** Пусть строго выпуклая оболочка, жестко закрепленная по краю, находится под действием равномерного внешнего давления  $p$ . Рассмотрим состояния упругого равновесия оболочки, при которых ее форма испытывает закритические деформации. Согласно принципу А (§ 1, стр. 32) определение этих состояний сводится к решению задачи на экстремум для функционала

$$W = U - A$$

на множестве изометрических преобразований исходной поверхности. Если предположить, что деформация сопровождается выпучиванием выпуклой области, то класс изометрических преобразований, на которых рассматривается функционал, сужается до изометрических преобразований, сводящихся к зеркальному выпучиванию (§ 1, п. 1).

В случае зеркального выпучивания энергия деформации  $U$  определяется по формуле (стр. 49)

$$U = \pi c E (2h)^{3/2} \delta^{3/2} (k_1 + k_2),$$

где  $2h$  — высота выпучивания в центре области,  $k_1$  и  $k_2$  — главные кривизны срединной поверхности,  $\delta$  — толщина обо-

лочки,  $E$  — модуль упругости, а постоянная  $c \simeq 0,19$ . Определим производимую внешним давлением  $p$  работу  $A$ . Она равна произведению величины давления на изменение (при деформации) объема, ограничиваемого оболочкой, т. е.

$$A = p \Delta V$$

Найдем  $\Delta V$ . Приняв центр выпучивания  $P$  за начало координат, а касательную плоскость в  $P$  за плоскость  $xu$ , при соответствующем направлении осей  $x$ ,  $y$  можем задать поверхность оболочки вблизи  $P$  уравнением

$$z = \frac{1}{2} (k_1 x^2 + k_2 y^2).$$

Если обозначить через  $S(z)$  площадь области, определяемой неравенством

$$\frac{1}{2} (k_1 x^2 + k_2 y^2) \leq z,$$

то интересующий нас объем

$$\Delta V = 2 \int_0^h S(z) dz.$$

Площадь  $S(z)$ , как площадь эллипса с полуосями

$$a = \sqrt{\frac{2z}{k_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{2z}{k_2}}$$

равна  $\pi ab$ , и, следовательно,

$$S(z) = \pi \frac{2z}{\sqrt{k_1 k_2}}.$$

Отсюда после интегрирования по  $z$  получаем объем

$$\Delta V = \frac{2\pi h^2}{\sqrt{k_1 k_2}}.$$

Производимая внешним давлением  $p$  работа равна

$$A = \frac{2\pi h^2 p}{\sqrt{k_1 k_2}}.$$

Теперь из условия стационарности функционала  $W$  в состоянии упругого равновесия оболочки находим зависимость воспринимаемого оболочкой давления  $p$  от прогиба  $2h$  в центре

выпучивания. Имеем

$$dW = 3\pi cE (2h)^{1/2} \delta^{3/2} (k_1 + k_2) dh - \frac{4\pi h p}{\sqrt{k_1 k_2}} dh = 0,$$

откуда

$$p = \frac{3}{2} cE (k_1 + k_2) \sqrt{k_1 k_2} \frac{\delta^{3/2}}{\sqrt{2h}}.$$

Из этой формулы видно, что воспринимаемое оболочкой давление  $p$  уменьшается при увеличении деформации  $(2h)$ . А это указывает на неустойчивость закритических деформаций под внешним давлением. Заключение о неустойчивости найденных упругих состояний соответствует экспериментальным данным о характере закритических деформаций под внешним давлением. Согласно этим данным, закритические деформации после потери устойчивости оболочки развиваются без увеличения нагрузки и даже при ее уменьшении.

Наименьшая воспринимаемая оболочкой нагрузка при закритической деформации называется *нижней критической* в отличие от верхней критической нагрузки, при которой

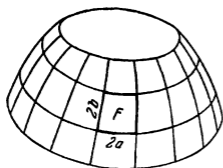


Рис. 6.

происходит потеря устойчивости основной формы. Рассмотрим вопрос о величине нижней критической нагрузки для строго выпуклых оболочек, находящихся под внешним давлением. Ввиду того, что воспринимаемая оболочкой нагрузка уменьшается при увеличении деформации, нижняя критическая нагрузка соответствует наибольшей геометрически допу-

стимой деформации. Если эту деформацию обозначать  $2h_1$ , то нижняя критическая нагрузка  $p_1$  будет определяться по формуле

$$p_1 = \frac{3}{2} cE (k_1 + k_2) \sqrt{k_1 k_2} \frac{\delta^{3/2}}{\sqrt{2h_1}}.$$

Рассмотрим в качестве примера строго выпуклую оболочку вращения, подкрепленную жесткими элементами, идущими вдоль параллелей и меридианов поверхности (рис. 6). Пусть  $F$  — отсек оболочки, ограниченный подкрепляющими элементами,  $2a$  и  $2b$  — размеры отсека по параллели и мери-

диану соответственно. Так как размеры области выпучивания по главным направлениям при высоте выпучивания  $2h$  равны

$$\sqrt{\frac{2h}{k_1}} \quad \sqrt{\frac{2h}{k_2}},$$

то максимальная деформация  $2h_i$  отсека  $F$  определяется меньшей из двух величин

$$k_1 a^2 \quad \text{и} \quad k_2 b^2,$$

где  $k_1$  — нормальная кривизна поверхности в направлении параллели, а  $k_2$  — нормальная кривизна по меридиану, т. е.

$$2h_i = \min \{k_1 a^2, k_2 b^2\}.$$

Подставляя величину  $2h_i$  в формулу для  $p$ , получим нижнее критическое давление

$$p_i = \frac{3}{2} cE (k_1 + k_2) \sqrt{k_1 k_2} \frac{\delta^{3/2}}{\sqrt{2h_i}}.$$

В связи с экспериментальной проверкой полученного результата о величине нижней критической нагрузки рассмотрим закритические деформации жестко закрепленного по краю сферического сегмента. Если радиус кривизны сегмента равен  $R$ , то воспринимаемое им давление  $p$  при выпучивании на высоту  $2h$  определяется по формуле

$$p = 3cE \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \sqrt{\frac{\delta}{2h}}.$$

При высоте сегмента  $h_0$  для максимальной геометрически допустимой деформации  $2h$  имеем

$$2h = 2h_0.$$

Поэтому нижнее критическое давление для сферического сегмента равно

$$p_i = 3cE \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \sqrt{\frac{\delta}{2h_0}}.$$

Если в эту формулу ввести вместо высоты  $h_0$  радиус основания сегмента

$$r \simeq \sqrt{2h_0 R},$$

то она принимает вид

$$p_i = 3cE \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \sqrt{\frac{\delta R}{r^2}},$$

Еясним теперь область применимости полученных результатов к реальным оболочкам, обладающим ограниченной упругостью. Наше основное предположение при рассмотрении закритических деформаций состояло в том, что изменение формы оболочки при таких деформациях весьма значительно. Практически это значит, что размеры области выпучивания имеют порядок размеров всей оболочки. Ввиду ограниченной упругости материала оболочки, ее упругие деформации естественным образом ограничены, а это ограничивает размеры оболочек, к которым полученные результаты применимы. Для того чтобы придать этим ограничениям конкретную форму, рассмотрим для примера сферическую оболочку в форме сегмента.

Максимальные напряжения в материале оболочки (на границе выпучивания) при деформации  $2h$  равны (стр. 49)

$$\sigma = c'E (2h)^{1/2} \delta^{1/2} \frac{1}{R}.$$

Если временное сопротивление материала оболочки обозначить  $\sigma_s$ , то область ее упругих деформаций ограничивается условием

$$c'E (2h)^{1/2} \delta^{1/2} \frac{1}{R} < \sigma_s,$$

или, вводя вместо  $2h$  радиус круга выпучивания  $\rho$  по формуле

$$2h = \frac{\rho^2}{R},$$

получим

$$c'E \frac{\rho}{R} \sqrt{\frac{\delta}{R}} < \sigma_s.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\rho}{R} < \frac{\sigma_s}{c'E} \sqrt{\frac{R}{\delta}}.$$

Для того чтобы деформацию считать значительной, надо, чтобы  $\rho$  имело порядок радиуса основания сегмента  $r$ . Таким образом, наши рассуждения относятся к таким сферическим оболочкам, у которых величины

$$\frac{r}{R} \text{ и } \frac{\sigma_s}{c'E} \sqrt{\frac{R}{\delta}}$$

имеют один порядок. При обычных соотношениях между величинами  $\sigma_0$ ,  $E$ ,  $\delta$  и  $R$  это означает, что оболочки должны быть очень пологими.

Еще более жестким условием ограничивается применение формулы для нижней критической нагрузки. Именно, так как нижняя критическая нагрузка соответствует максимальной геометрически допустимой деформации, то соответствующее условие для сферических оболочек сводится к тому, что

$$\frac{r}{R} \leq \frac{\sigma_0}{c'E} \sqrt{\frac{R}{\delta}}.$$

Нижняя критическая нагрузка для пологих сферических сегментов была подвергнута экспериментальному исследованию. Соответствующий эксперимент состоял в следующем.

Внутри массивного цилиндрического сосуда 1 (рис. 7), закрытого сверху испытуемой сферической оболочкой 2, с помощью микрометрического винта подавался поршень 3. При этом в жидкости, заполняющей сосуд, нарастало давление, которое регистрировалось определенным устройством. Достигнув критического значения, давление начинало уменьшаться и снижалось до некоторого минимума, после чего снова увеличивалось. Максимальное давление отвечает моменту потери устойчивости оболочки и является верхним критическим давлением. А минимум давления соответствует нижней критической нагрузке, как мы ее определили.

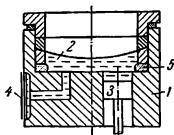


Рис. 7.

Отметим некоторые особенности конструкции экспериментальной установки и работы на ней. Прежде всего мы стремились избежать резкого «хлопка», которым обычно сопровождается потеря устойчивости оболочки в экспериментах такого рода. В связи с этим все упругие элементы конструкции были сделаны «максимально жесткими». Именно поэтому в качестве среды, заполняющей сосуд и сообщающей давление на оболочку, была взята жидкость, а сам сосуд выполнен достаточно массивным, с толстыми стенками. Давление регистрировалось при помощи весьма чувствительного тензометрического датчика 4, укрепленного на поверхности



сосуда. В результате всех указанных мер давление в результате «хлопка» не снижалось до минимума и достигало этого минимума только при дальнейшем продвижении поршня внутрь сосуда. Это важно для оболочек с ограниченной упругостью, которые после энергичного «хлопка» могут показать даже отрицательное нижнее критическое давление.

Испытуемый сегмент был зажат между двух стальных колец, из которых нижнее опиралось на резиновую прокладку 5, а верхнее прижималось флянцем. Условия защемления сегмента по краю, близкие к идеальным, обеспечивались притиркой колец по соответствующим сферическим поверхностям и равномерностью давления колец благодаря эластичности прокладки 5.

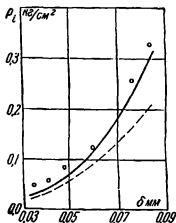


Рис. 8.

Четыре тензометрических датчика 4, расположенные на боковой поверхности сосуда, — два по окружности, а два другие в осевом направлении — были соединены обычным способом в мостиковую схему, которая подключалась к источнику питания и гальванометру. Показания гальванометра предварительно тарировались.

Испытанию подвергались медные сферические сегменты, полученные напылением в вакууме. Радиус кривизны сегментов  $R = 80$  мм, а толщина  $\delta$  изменялась в пределах от 0,03 до 0,09 мм. Внутренний диаметр колец  $2r$ , зажимающих испытуемые сегменты, равнялся  $2r = 16$  мм.

На рис. 8 пунктирной линией изображена зависимость нижнего критического давления  $p_i$ , даваемого формулой

$$p_i = 3cE \left( \frac{\delta}{R} \right)^2 \sqrt{\frac{\delta R}{r^2}},$$

от толщины оболочки  $\delta$ . Модуль упругости  $E$  принят равным  $1,1 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>, постоянная  $c = 0,19$ , а  $R$  и  $r$  имеют указанные выше значения. Отдельные точки, отмеченные кружочками, дают значения нижнего критического давления, полученные в эксперименте.

Мы видим, что для всех значений  $\delta$  теоретическое значение  $p_i$  меньше экспериментального. И это понятно. Действительно, при выводе формулы для  $p_i$  мы считали, что при деформации, отвечающей нижнему критическому давлению, радиус круга выпучивания  $\rho$  равен радиусу основания сегмента  $r$ . В действительности всегда

$$\rho < r.$$

Поэтому для получения истинного значения нижнего критического давления надо в формулу для  $p_i$  подставлять вместо  $r$  несколько меньшее значение. Насколько меньшее, мы сейчас выясним.

На рис. 9 изображено сечение сферической оболочки при закритической деформации. Воспринимаемая оболочкой нагрузка  $p$  и деформация ( $\delta$ ) связаны соотношением (стр. 56)

$$p = 3cE \left( \frac{\delta}{R} \right)^2 \sqrt{\frac{\delta R}{\rho^2}},$$



где  $\rho$  — радиус круга выпучивания. Пусть  $A$  — точка на границе выпучивания,  $B$  — ближайшая к  $A$  точка, в которой радиальное смещение  $u$ , вызванное рассматриваемой деформацией, равно нулю. Если бы в точке  $B$  было и  $v' = 0$ , то вдоль параллели  $\gamma_B$ , проходящей через точку  $B$ , реализовалось бы условие жесткого закрепления. Формула

$$p = 3cE \left( \frac{\delta}{R} \right)^2 \sqrt{\frac{\delta R}{\rho_A^2}} \quad (*)$$

давала бы величину нижнего критического давления для сегмента, ограниченного параллелью  $\gamma_B$ , при условии жесткого закрепления вдоль этой параллели. Однако в точке  $B$  условие  $v' = 0$  не выполняется. Поэтому формула (\*) дает критическое давление, отвечающее только упругому закреплению оболочки вдоль параллели  $\gamma_B$  (упругость в повороте касательных плоскостей). Если сегмент, ограниченный параллелью  $\gamma_B$ , отождествить с испытуемым, то соответствующее ему давление  $p_i$ , определяемое по формуле (\*), все еще будет меньше истинного, но уже гораздо ближе к нему. Вычислим это уточненное значение  $p_i$ .

Пусть  $\rho$  — радиус параллели, проходящей через точку  $A$ , а  $r$  — радиус параллели, проходящей через  $B$ . Положим

$$\Delta\rho = r - \rho.$$

Если перейти к безразмерным величинам, как это было сделано в § 1, п. 2, то безразмерное расстояние  $\Delta\bar{\rho}$  между точками  $A$  и  $B$  будет первым отличным от нуля корнем уравнения

$$u(s) = 0,$$

где  $u(s)$  — функция, реализующая минимум функционала  $J$  (§ 1, п. 2). Принимая во внимание явное выражение функции

$$u(s) = -\frac{\sigma}{3\sqrt{2}} (\omega_1 e^{\omega_1(s-\sigma)} + \omega_2 e^{\omega_2(s-\sigma)})$$

и значения

$$\sigma \simeq 1,25, \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i), \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - i),$$

находим

$$\Delta\bar{\rho} = \sigma + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \simeq 2,36.$$

По величине  $\Delta\bar{\rho}$  можно найти величину  $\Delta\rho$ , так как они связаны соотношением

$$\Delta\bar{\rho} = \frac{\Delta\rho}{\rho\varepsilon}, \quad \varepsilon^4 = \frac{\delta^2}{12\rho^2\alpha^2}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \Delta\bar{\rho} \sqrt{\frac{\delta}{\rho\alpha}} \frac{1}{12^{1/4}}.$$

Подставляя сюда  $\alpha \simeq \rho/R$ , находим

$$\Delta\rho = \frac{\Delta\bar{\rho}}{12^{1/4}} \sqrt{\delta R} \simeq 1,3 \sqrt{\delta R},$$

$$\rho = r - \Delta\rho = r - 1,3 \sqrt{\delta R}.$$

Таким образом, для нижнего критического значения  $p_t$  имеет место следующая уточненная формула:

$$p_t = \frac{3cE \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \sqrt{\delta R}}{r - 1,3 \sqrt{\delta R}}.$$

Графическое изображение этой зависимости на рис. 8 представлено сплошной линией. Мы видим, что уточненное значение  $p_i$  по-прежнему меньше истинного, но значительно ближе к нему.

Проведенное исследование закритических деформаций строго выпуклых оболочек под внешним давлением можно резюмировать следующим образом:

1. При закритической деформации полой строго выпуклой оболочки, жестко закрепленной по краю, воспринимаемая ею нагрузка  $p$  (внешнее давление) в зависимости от прогиба  $2h$  в центре выпучивания определяется по формуле

$$p = \frac{3}{2} cE (k_1 + k_2) \sqrt{k_1 k_2} \frac{\delta^{3/2}}{\sqrt{2h}}.$$

2. Нижняя критическая нагрузка  $p_i$ , то есть наименьшая воспринимаемая оболочкой нагрузка, определяется максимальной геометрически допустимой деформацией  $2h_i$  по формуле

$$p_i = \frac{3}{2} cE (k_1 + k_2) \sqrt{k_1 k_2} \frac{\delta^{3/2}}{\sqrt{2h_i}}.$$

Определяемое этой формулой значение  $p_i$  меньше истинного, но близко к нему \*). Для сферических сегментов имеет место уточненная формула нижней критической нагрузки. Именно,

$$p_i = \frac{3cE \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \sqrt{\delta R}}{r - 1,3 \sqrt{\delta R}}.$$

3. Все перечисленные результаты применимы для реальных оболочек, обладающих ограниченной упругостью, только при их достаточной пологости. В частности, применение формулы для нижнего критического давления в случае сферических сегментов предполагает

\*) Разумеется, когда деформация  $2h$  приближается к геометрически допустимой  $2h_i$ , начинает сказываться закрепление края. Так что полученная формула, строго говоря, дает оценку снизу для нижней критической нагрузки. Даваемое формулой значение нижней критической нагрузки тем точнее, чем меньше отношение  $\delta/2h_i$ .

выполненным условие

$$\frac{r}{R} < \frac{\sigma_s}{c'E} \sqrt{\frac{R}{\delta}}.$$

Рассматривая вопрос о нижней критической нагрузке для общих строго выпуклых оболочек, мы предполагали их достаточную пологость. Условие пологости состояло в том, что по области выпучивания касательные плоскости срединной поверхности оболочки образовывали малые углы, а нормальные кривизны мало отличались от некоторых средних значений. Это позволило решить задачу в замкнутом виде для оболочек произвольной формы. Однако в каждом конкретном случае применяемый нами метод позволяет решать задачу и при более общих предположениях, когда, в частности, второе условие, относящееся к нормальным кривизнам, может и не выполняться. В качестве примера найдем внешнее нижнее критическое давление для эллипсоидального днища цилиндрического резервуара.

Мы будем предполагать, что закритическая деформация днища обладает осевой симметрией, как и первоначальная форма. Энергия деформации днища равна

$$U = 2\pi c E \delta^{3/2} \alpha^{5/2} \rho^{1/2},$$

где  $\delta$  — толщина днища,  $\rho$  — радиус области выпучивания,  $\alpha$  — угол между плоскостью кривой, ограничивающей область выпучивания, и касательными плоскостями поверхности,  $E$  — модуль упругости, а постоянная  $c \approx 0,19$ .

Производимая внешним давлением  $p$  работа при выпучивании днища равна

$$A = pV,$$

где  $V$  — изменение объема резервуара при деформации днища.

Будем характеризовать выпучивание днища параметром  $\rho$ . Тогда условие упругого равновесия днища при выпучивании будет

$$\frac{d}{d\rho} (U - A) = 0.$$

Предполагая достаточную пологость области выпучивания будем иметь

$$\frac{d\alpha}{d\rho} \approx k,$$

где  $k$  — кривизна днища в исходной форме по радиальному сечению. Отсюда

$$\frac{dU}{d\rho} = \pi c E \delta^{3/2} \alpha^{3/2} \rho^{-1/2} \left( 5 \frac{\rho}{\alpha} k + 1 \right).$$

Обозначим через  $h$  высоту зеркально отражаемого сегмента. Тогда

$$\frac{dA}{d\rho} = \rho \frac{dV}{dh} \frac{dh}{d\rho}, \quad \frac{dV}{dh} = 2\pi\rho^2, \quad \frac{dh}{d\rho} \simeq \alpha.$$

Таким образом,

$$\frac{dA}{d\rho} = 2\pi\rho^2\alpha.$$

Подставляя полученные значения  $dU/d\rho$  и  $dA/d\rho$  в уравнение равновесия, получаем связь между воспринимаемым давлением  $p$  и деформацией днища:

$$p = \frac{1}{2} c E \left( \frac{\delta}{\rho} \right)^{3/2} \alpha^{3/2} \left( 5 \frac{\rho}{\alpha} k + 1 \right).$$

Введем вместо  $\rho$  параметр  $\xi = \rho/R$ , где  $R$  — радиус основания днища. В зависимости от этого параметра величины  $\alpha$  и  $k$  выражаются по формулам

$$\alpha \simeq \operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda \xi}{(1 - \xi^2)^{1/2}}, \quad k \simeq \frac{\lambda}{R} \frac{1}{(1 - \xi^2)^{3/2}},$$

где  $\lambda$  — отношение высоты днища к радиусу основания, то есть отношение малой полуоси эллипсоида к большой полуоси. Подставляя найденные значения  $\alpha$  и  $k$  в зависимости от  $\xi$  в формулу для  $p$ , получим

$$p = \frac{c}{2} E \left( \frac{\delta}{R} \right)^{3/2} \lambda^{3/2} \theta(\xi),$$

$$\theta(\xi) = \frac{1}{\xi} \frac{1}{(1 - \xi^2)^{3/4}} \left( \frac{5}{1 - \xi^2} + 1 \right).$$

Нижнее критическое давление  $p_i$  отвечает наименьшему значению  $\theta$ . Оно получается при  $\xi \simeq 0,5$  и равно  $\simeq 18,8$ . Отсюда, принимая во внимание значение постоянной  $c \simeq 0,19$ , получаем следующую формулу для нижнего критического давления

$$p_i = 1,8 E \left( \frac{\delta}{R} \right)^{3/2} \lambda^{3/2}.$$

В ходе нашего вывода мы заранее предполагали, мало. Покажем, что это предположение выполняется, достаточно мало  $\lambda$ . Действительно

$$\alpha \simeq \frac{\lambda \xi}{(1 - \xi^2)^{1/2}}.$$

При  $\xi = 0,5$

$$\alpha \simeq 0,5 \lambda,$$

и, следовательно,  $\alpha$  мало вместе с  $\lambda$ . Можно считать, что условие малости  $\alpha$  выполнено, если  $\lambda < 0,5$ .

**4. Уруго-пластические закритические деформации.** Закритическая деформация, будучи связана со значительными изменениями внешней формы оболочки, приводит к очень большим напряжениям в материале оболочки, в особенности на границе областей выпучивания. Поэтому реальные оболочки, обладающие ограниченной упругостью, как правило, испытывают при этом уруго-пластическую деформацию. В связи с этим представляет безусловный интерес исследование вопроса о том, как протекает закритическая деформация оболочек с ограниченной упругостью.

Допустим, закритическая деформация оболочки настолько значительна, что напряжения от изгиба на границе выпучивания вызывают пластические деформации. Вычислим энергию уруго-пластической деформации элемента оболочки на границе выпучивания.

Мы будем предполагать, что материал оболочки имеет классическую диаграмму состояния. Это значит, что относительная деформация (растяжение — сжатие)  $\epsilon$  и вызывающие ее напряжения  $\sigma$  связаны зависимостью, представленной на рис. 10. Таким образом, при  $|\epsilon| \leq \epsilon_e$  деформация является уругой, и соответствующие ей напряжения  $\sigma$  в материале определяются по формуле

$$\sigma = \epsilon E.$$

Деформация  $\epsilon$  при  $|\epsilon| > \epsilon_e$  является пластической. В области пластических деформаций напряжения в материале остаются

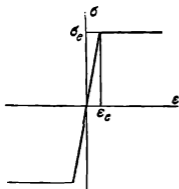


Рис. 10.

постоянными, равными при растяжении и ( $-\sigma_e$ ) при сжатии.

Пусть элемент оболочки подвергается значительному изгибу. Если изменение кривизны срединной поверхности оболочки, вызванное этим изгибом, равно  $k$ , то относительная деформация растяжения (сжатия) в материале оболочки на расстоянии  $h$  от срединной поверхности будет

$$\epsilon = kh.$$

При этом, если  $k$  велико так, что  $\epsilon \gg \epsilon_e$ , то энергия деформации, отнесенная к единице объема, на этом расстоянии будет

$$A(h) \simeq \sigma_e kh.$$

Энергия деформации оболочки, отнесенная к единице площади срединной поверхности, равна

$$A = 2 \int_0^{\delta/2} A(h) dh = \sigma_e k \frac{\delta^2}{4}.$$

Предположим теперь, что элемент оболочки испытывает значительный изгиб с изменением кривизны на  $k$  сначала в одном направлении, а затем в противоположном с восстановлением первоначальной формы. Энергия такой деформации оболочки на единицу площади срединной поверхности будет

$$A' = \frac{\sigma_e k \delta^2}{2}.$$

Пусть в ходе закритической деформации оболочки область выпучивания расширяется и в некоторый момент на ее границе возникают пластические деформации. Вычислим энергию упруго-пластической деформации во внешней полукрестности условного ребра, ограничивающего область выпучивания. Мы будем предполагать, что пластические деформации оболочки возникают только от изгиба в плоскости, перпендикулярной ребру. Деформация срединной поверхности предполагается упругой.

Обозначим через  $\epsilon_e^*$  ширину внешней полукрестности ребра, охваченной пластическими деформациями. Полную энергию деформаций  $U$  во внешней полукрестности можно представить в виде

$$U = U' + U'',$$



где  $U'$  — энергия упруго-пластической деформации в непосредственной близости ребра,  $U''$  — энергия чисто упругой деформации в оставшейся части зоны сильного изгиба.

Сохраняя обозначения п. 2 § 1, можем записать

$$\bar{U}'' = \frac{\delta E}{1-\nu^2} \int_{\epsilon_e^*}^{\epsilon_e^*} \left( \frac{\delta^2 \nu'^2}{12} + \frac{u^2}{\rho^2} \right) ds.$$

Энергия упруго-пластической деформации равна

$$U' = \frac{\delta E}{1-\nu^2} \int_0^{\epsilon_e^*} \frac{u^2}{\rho^2} ds + \int_0^{\epsilon_e^*} \frac{\sigma_e \nu'' \delta^2}{4} ds$$

$$\bar{U}' = \frac{\delta E}{1-\nu^2} \int_0^{\epsilon_e^*} \frac{u^2}{\rho^2} ds + \frac{\sigma_e \delta^2}{4} (\nu'(\epsilon_e^*) - \nu'(0)).$$

Здесь второй член учитывает энергию упруго-пластической деформации от изгиба в плоскости, перпендикулярной ребру, а первый член — энергию деформации в срединной поверхности, сопровождающей этот изгиб. Обе формулы дают энергию деформации, отнесенную к единице длины ребра.

Так же, как в § 1 при исследовании упругих деформаций, введем вместе переменных  $u$ ,  $\nu$ ,  $s$  новые переменные  $\bar{u}$ ,  $\bar{\nu}$ ,  $\bar{s}$  согласно формулам

$$\bar{u} = \frac{u}{\epsilon \rho \alpha^2}, \quad \bar{\nu} = \frac{\nu'}{\alpha}, \quad \bar{s} = \frac{s}{\rho \epsilon}, \quad \epsilon^4 = \frac{\delta^2}{12 \rho^2 \alpha^2}.$$

В новых переменных, над обозначениями которых черта опускается, будем иметь

$$U'' = K \int_{\bar{\epsilon}_e^*}^{\bar{\epsilon}_e^*} (\nu'^2 + u^2) ds,$$

$$\bar{U}' = K \int_0^{\bar{\epsilon}_e^*} u^2 ds + \frac{\alpha \delta^2 \sigma_e}{4} (\nu(\bar{\epsilon}_e^*) + 1),$$

где  $\bar{\epsilon}_e^*$  и  $\bar{\epsilon}^*$  — новые пределы интегрирования.

В тех же предположениях, что и в § 1, предел интегрирования  $\bar{\epsilon}^*$  можно принять равным  $\infty$ . Если при этом  $\bar{\epsilon}_e^*$  для простоты записи обозначить  $\sigma$ , то полную энергию  $\bar{U}$  упруго-пластической деформации во внешней полуокрестности ребра можно записать так:

$$\bar{U} = K \int_0^{\infty} (\vartheta v'^2 + u^2) ds + \frac{\alpha \delta^2 \sigma \epsilon}{4} (\vartheta(\sigma) + 1),$$

где  $\vartheta(s) = 0$  при  $s \leq \sigma$ ,  $\vartheta(s) = 1$  при  $s > \sigma$ ,

$$K = \frac{E \delta^{3/2} \alpha^{3/2}}{2 \cdot 12^{3/4} \rho^{1/2}}.$$

Истинная форма, которую принимает оболочка во внешней полуокрестности ребра — границы выпучивания — определяется из условия минимума функционала  $\bar{U}$ . Рассмотрим задачу о минимуме этого функционала.

Исходя из наглядных представлений о характере деформации оболочки во внешней полуокрестности ребра, будем предполагать, что область пластических деформаций от изгиба охватывает участок  $AB$  (рис. 11). Точка  $B$  определяется тем условием, что касательная в ней параллельна внешней полукасательной у ребра. Аналитически положение точки  $B$  определяется условием

$$v(\sigma) = 0.$$

В таком предположении относительно зоны пластических деформаций для энергии деформации  $\bar{U}$  будем иметь

$$\bar{U} = K \int_0^{\infty} (\vartheta v'^2 + u^2) ds + \frac{\alpha \delta^2 \sigma \epsilon}{4}.$$

Так же как в случае неограниченно упругих оболочек (§ 1), будем считать, что  $v' = \text{const}$  при  $s \leq \sigma$ . Далее, предполагая  $v$  сравнительно малым при  $s > \sigma$ , опустим член  $v^2/2$



в дифференциальной связи функций  $u, v$

$$u' + v + \frac{v^2}{2} = 0.$$

Фиксировав  $\sigma$ , найдем минимум функционала  $\bar{U}$  и функции  $u, v$ , которые его реализуют.

Так как  $v' = \text{const}$  при  $s \leq \sigma$ , и

$$v(0) = -1, \quad v(\sigma) = 0,$$

то при  $s \leq \sigma$

$$v(s) = \frac{s - \sigma}{\sigma}.$$

Зная  $v(s)$  при  $s \leq \sigma$ , находим  $u(s)$ , используя связь между этими функциями

$$u' + v + \frac{v^2}{2} = 0.$$

Принимая во внимание, что  $u(0) = 0$ , получаем следующее выражение для  $u(s)$  при  $s \leq \sigma$ :

$$u = -\frac{1}{2\sigma}(s - \sigma)^2 - \frac{1}{6\sigma^2}(s - \sigma)^3 + \frac{\sigma}{3}.$$

Для определения функций  $u(s)$  и  $v(s)$  при  $s > \sigma$  минимизируем функционал

$$\int_{\sigma}^{\infty} (v'^2 + u^2) ds$$

при неголономной связи между варьируемыми функ

$$u' + v = 0.$$

Решение этой задачи ничем не отличается от приведенного в § 1, и оно дает следующие выражения для функций  $u$  и  $v'$  при  $s > \sigma$ :

$$u = -\frac{\sigma}{3\sqrt{2}}(\omega_1 e^{\omega_1(s-\sigma)} + \omega_2 e^{\omega_2(s-\sigma)}),$$

$$v' = -\frac{\sigma i}{3\sqrt{2}}(-\omega_1 e^{\omega_1(s-\sigma)} + \omega_2 e^{\omega_2(s-\sigma)}),$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i), \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - i).$$

Подставив найденные значения функций  $u$ ,  $v$  в выражение функционала  $\bar{U}$ , получим его значение в зависимости от параметра  $\sigma$

$$\bar{U}(\sigma) = K \left\{ \frac{\sqrt{2}\sigma^2}{9} + \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{7.36} \right) \sigma^3 \right\} + \frac{\alpha d^2 \sigma \epsilon}{4}.$$

Далее мы должны минимизировать выражение  $\bar{U}(\sigma)$  по  $\sigma$ . Однако мы видим, что  $\bar{U}(\sigma)$  монотонно убывает при  $\sigma \rightarrow 0$ . Это значит, что рассматриваемая нами задача регулярного решения не имеет, ибо при  $\sigma \rightarrow 0$  на отрезке  $(0, \sigma)$

$$v' = \frac{1}{\sigma} \rightarrow \infty.$$

Физический смысл полученного результата состоит в том, что появление пластических деформаций на границе выпучивания ведет к образованию действительного ребра на поверхности оболочки ( $k \simeq 1/\sigma \rightarrow \infty$ ). Нетрудно пояснить механизм образования ребра наглядными соображениями. Действительно, упругое состояние оболочки до появления пластических деформаций определяется в основном изгибом в плоскости, перпендикулярной ребру, и сопровождающими этот изгиб

растяжением срединной поверхности во внешней зоне и сжатием во внутренней (рис. 12). Если в точке  $C$  на ребре возникают пластические деформации, то жесткость оболочки на изгиб уменьшается. При этом растяжение срединной поверхности во внешней зоне и сжатие во внутренней увеличивают деформацию изгиба в  $C$ . Это ведет к дальнейшему ослаблению оболочки на изгиб.

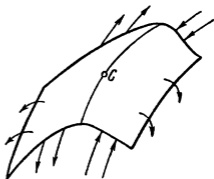


Рис. 12.

В итоге оболочка принимает форму с очень большой, теоретически бесконечно большой кривизной в направлении, перпендикулярном ребру.

Появление пластических деформаций на границе выпучивания останавливает закритическую деформацию

цию. Действительно, закритическая деформация сопровождается изменением области выпучивания, и, следовательно, перемещением ребра, ограничивающего эту область. Если в данной точке ребра возникают пластические деформации от изгиба, то кривизна  $k$  поверхности в направлении, перпендикулярном ребру, становится очень большой (в нашем рассмотрении бесконечно большой). Перемещение ребра связано с изгибом оболочки сначала в одном направлении до кривизны  $k$ , а затем с изгибом в противоположном направлении, практически восстанавливающим первоначальную форму. Энергия на единицу площади поверхности оболочки, связанная с такой деформацией, равна

$$\simeq \frac{\sigma_e k \delta^2}{2}.$$

Поэтому перемещение элемента ребра  $\Delta l$  на величину  $\Delta s$  требует выполнения работы

$$\frac{\sigma_e k \delta^2}{2} \Delta l \Delta s.$$

Эту работу должна выполнять действующая на оболочку нагрузка. Но нагрузка конечна, а величина  $k$  очень велика (бесконечно велика). Следовательно,  $\Delta s = 0$ , то есть появление пластических деформаций останавливает закритическую деформацию.

Теперь мы можем сформулировать принцип А применительно к ограниченно упругим оболочкам.

*Ограниченно упругая оболочка допускает только такие закритические деформации, определяемые принципом А, при которых напряжения  $\sigma$  на границе выпучивания, определяемые по формуле (§ 1)*

$$\sigma = c' E \frac{\delta^{1/2} a^{3/2}}{\rho^{1/2}},$$

*не превосходят временного сопротивления  $\sigma_0$  (мы считаем, что временное сопротивление является пределом упругости).*

Применим полученный результат для исследования закритических деформаций строго выпуклых оболочек под внешним давлением.

В предположениях п. 3 наименьшая воспринимаемая оболочкой нагрузка  $p_l$  при закритической деформации

определяется максимальной допустимой деформацией и вычисляется по формуле

$$p_1 = \frac{3}{2} cE (k_1 + k_2) \sqrt{k_1 k_2} \frac{\delta^{5/2}}{\sqrt{2h_1}}.$$

В случае неограниченно упругих оболочек максимальная деформация  $2h_1$  определяется геометрическими размерами оболочки. В случае ограниченно упругих оболочек максимальная деформация может определяться условием появления на границе выпучивания пластических деформаций, то есть условием (стр. 56)

$$c'E \sqrt{2h_1} \delta^{1/2} \sqrt{k_1 k_2} = \sigma_0. \quad (*)$$

Определяя отсюда  $2h_1$  и подставляя его в формулу для  $p_1$ , получим нижнюю критическую нагрузку для ограниченно упругих оболочек

$$p_1 = \frac{3}{2} cc' \left( \frac{E}{\sigma_0} \right) (k_1 + k_2) k_1 k_2 E \delta^3.$$

Применение этой формулы естественно предполагает, что деформация, определяемая условием (\*), является геометрически допустимой.

В случае сферической оболочки радиуса  $R$  формула для нижней критической нагрузки принимает вид

$$p_1 = 3cc' \left( \frac{E}{\sigma_0} \right) E \left( \frac{\delta}{R} \right)^3$$

### § 3. Об устойчивости закритических осесимметрических деформаций сферической оболочки при осесимметрическом нагружении

В § 1 при рассмотрении закритических деформаций пологих строго выпуклых оболочек, жестко закрепленных по краю, показано, что такие деформации в основном приближении сводятся к зеркальному выпучиванию. Установление этого факта существенно опирается на два предположения: 1) деформация оболочки должна быть значительной и 2) закрепление края оболочки является достаточно жестким. При нарушении хотя бы одного из этих условий мы вправе ожидать и другого результата. В этом нас убеждают данные соответствующих опытов. Закритическая деформация

сферической оболочки при выпучивании области малых размеров, а также при недостаточной жесткости закрепления края может не обладать осевой симметрией, хотя оболочка и способ нагружения ее являются осесимметрическими. Область выпучивания часто имеет форму треугольника или четырехугольника со скругленными вершинами. В связи с этим в настоящем параграфе мы хотим исследовать вопрос об устойчивости осесимметрических закритических деформаций сферической оболочки при осесимметрической нагрузке. Будут рассмотрены два случая нагружения оболочки: равномерным внешним давлением и сосредоточенной силой. В последнем случае результаты теоретического рассмотрения будут сопоставлены с данными соответствующего эксперимента.

**1. Изгибание сферического сегмента. Уравнения изгиба.** Пусть  $F$  — пологий сферический сегмент с единичной кривизной и радиусом основания  $\rho_0 \ll 1$ . Введем декартовы координаты  $x, y, z$ , приняв касательную плоскость в вершине сегмента за плоскость  $xu$ , а внутреннюю нормаль — за положительную полуось  $z$ . В этих координатах сегмент задается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0.$$

Обозначим через  $\gamma$  кривую на поверхности сегмента, которая на плоскость  $xu$  проектируется в кривую, задаваемую в полярных координатах  $r, \vartheta$  уравнением

$$r = \rho(1 + \lambda \cos k\vartheta),$$

$$\rho \ll \rho_0, \quad \lambda \ll 1.$$

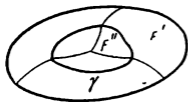


Рис. 13.

Кривая  $\gamma$  разбивает поверхность сегмента на две области: внутреннюю —  $F''$ , ограниченную кривой  $\gamma$ , и внешнюю —  $F'$ . Рассмотрим задачу об изгибании сегмента с продавливанием области  $F''$  внутрь, образованием ребра вдоль кривой  $\gamma$  и сохранением края в исходной плоскости (рис. 13). Предлагается следующий метод решения задачи.

Для каждой из поверхностей  $F'$  и  $F''$  мы построим независимые изгибания. Такие изгибания возможны и притом с большим произволом. Этим произволом мы распорядимся

так, чтобы кривые, ограничивающие области  $F'$  и  $F''$ , оказались совмещенными. В результате получим поверхность с ребром вдоль  $\gamma$ , изометричную исходному сегменту. Рассмотрим изгибание поверхностей  $F'$  и  $F''$ .

Пусть  $r$  — вектор точки одной из поверхностей, например,  $F'$ , и  $\tau$  — вектор смещения этой точки при изгибании поверхности. Так как линейный элемент поверхности при изгибании не изменяется, то должно иметь место равенство

$$dr^2 = (dr + d\tau)^2.$$

Отсюда для вектор-функции  $\tau$  получается уравнение

$$dr d\tau + \frac{1}{2} d\tau^2 = 0.$$

Кривая  $\gamma$  на поверхности сегмента, переходящая в ребро при изгибании, зависит от параметра  $\lambda$ . Параметр  $\lambda$  мал, и поэтому представляется целесообразным разложить вектор-функцию  $\tau$  по степеням этого параметра

$$\tau = \lambda\tau_1 + \lambda^2\tau_2 +$$

Мы полагаем  $\tau_0$  равным нулю, так как при  $\lambda = 0$  задача об изгибании имеет тривиальное решение с зеркальным отражением сегмента  $F''$  относительно плоскости кривой  $\gamma$ . При этом поле  $\tau$  на поверхности  $F'$  равно нулю тождественно.

Подставляя разложение  $\tau$  по степеням  $\lambda$  в уравнение изгибания, получим для вектор-функций  $\tau_1, \tau_2$ , бесконечную систему уравнений

$$\begin{aligned} dr d\tau_1 &= 0, \\ dr d\tau_2 + \frac{d\tau_1^2}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Векторные поля  $\tau_1, \tau_2$ , называются изгибающими первого, второго и т. д. порядков.

Введем в пространстве нормированные цилиндрические координаты  $u, v, z$ . Для произвольной точки  $A$  они имеют следующие значения:  $\rho^2 z$  — с точностью до знака расстояние точки  $A$  от плоскости  $xu$ ,  $\rho u$  — расстояние точки  $A$  от оси  $z$ ,  $v$  — угол, образуемый плоскостью  $\sigma$ , проходящей через ось  $z$  и точку  $A$ , с плоскостью  $xz$ . Такая нормировка координат



удобна при рассмотрении задачи об изгибании в случае малой области  $F''$ .

С каждой точкой  $A$  пространства мы свяжем подвижный триедр из трех единичных взаимно перпендикулярных векторов  $e_1, e_2, e_3$  (рис. 14). Вектор  $e_3$  направлен по оси  $z$  в сторону  $z > 0$ , вектор  $e_1$  лежит в плоскости  $\sigma$  и направлен от оси  $z$ , а вектор  $e_2$  перпендикулярен этой плоскости.

Очевидно, вектор  $e_3$  не зависит от точки  $A$ , а векторы  $e_1, e_2$  зависят только от координаты  $v$  этой плоскости. При этом можно считать, что вектор  $e_2$  направлен так, что

$$\frac{de_1}{dv} = e_2.$$

Тогда, очевидно,

$$\frac{de_2}{dv} = -e_1.$$

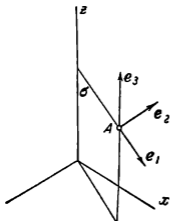


Рис. 14.

Будем рассматривать случай малых областей  $F''$ , то есть случай малых значений параметра  $\rho$ . При этом целесообразно нормировать координаты вектора смещения  $\tau$  с помощью параметра  $\rho$ . Именно, компоненты вектора  $\tau$  относительно базиса  $e_1, e_2, e_3$  удобно представить в следующем виде:

$$\rho^3 \xi, \quad \rho^3 \eta, \quad \rho^2 \zeta.$$

Уравнение изгибания

$$dr d\tau + \frac{d\tau^2}{2} = 0$$

эквивалентно системе трех уравнений

$$\left. \begin{aligned} r_u \tau_u + \frac{\tau_u^2}{2} &= 0, \\ r_u \tau_v + r_v \tau_u + \tau_u \tau_v &= 0, \\ r_v \tau_v + \frac{\tau_v^2}{2} &= 0. \end{aligned} \right\} (*)$$

Если в первое уравнение этой системы подставить векторы  $r$  и  $\tau$ , разложенные в базисе  $e_1, e_2, e_3$ , именно

$$\begin{aligned} r &= \rho u e_1 + \rho^2 z e_3, \\ \tau &= \rho^3 \xi e_1 + \rho^3 \eta e_2 + \rho^2 \zeta e_3, \end{aligned}$$

и воспользоваться формулами дифференцирования для векторов базиса

$$\frac{de_1}{dv} = e_2, \quad \frac{de_2}{dv} = -e_1,$$

то получим

$$\xi_u + z_u \zeta_u + \frac{1}{2} \zeta_u^2 + \frac{\rho^2}{2} (\xi_u^2 + \eta_u^2) = 0.$$

При малом  $\rho$  последнее слагаемое в этом уравнении может быть отброшено. Кроме того, из уравнения сегмента

$$\rho^2 z = 1 - \sqrt{1 - \rho^2 u^2}$$

при малом  $\rho$  получается

$$z_u \simeq u.$$

В итоге уравнение для  $\xi, \eta, \zeta$  при малых значениях  $\rho$  можно представить в виде

$$\xi_u + u \zeta_u + \frac{1}{2} \zeta_u^2 = 0.$$

Аналогично, из двух других уравнений изгибания после подстановки значений  $r$  и  $\tau$  при малых значениях параметра  $\rho$  получается

$$\begin{aligned} u(\eta_v + \xi) + \frac{1}{2} \zeta_v^2 &= 0, \\ \xi_v - \eta + u \zeta_v + u \eta_u + \zeta_u \zeta_v &= 0. \end{aligned}$$

При рассмотрении изгибания поверхности  $F'$  нам предстоит решать систему уравнений (\*) для функций  $\xi, \eta, \zeta$  в области

$$1 + \lambda \cos kv \leq u \leq \frac{\rho_0}{\rho}$$

при краевом условии

$$\zeta\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) = 0.$$

Однако ввиду предполагаемой малости параметра  $\rho$  мы будем искать решение в области, определяемой только первым неравенством, и краевое условие отнесем к бесконечности, то есть будем считать, что  $\zeta(u) \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow \infty$ .

Аналогичные рассуждения можно провести для изгибания другой части сегмента —  $F''$ . При этом получается в точности такая же система уравнений для функций  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . Но ее решение нужно рассматривать на оставшейся части плоскости, то есть в области

$$u \leq 1 + \lambda \cos kv.$$

Для того чтобы из поверхностей, получаемых изгибанием областей  $F'$  и  $F''$ , составлялась поверхность, изометричная сегменту с ребром вдоль  $\gamma$ , надо, чтобы соответствующие смещения  $\tau'$  и  $\tau''$  в указанных областях на их общей границе

$$u = 1 + \lambda \cos kv$$

удовлетворяли условиям

$$\xi' = \xi'', \quad \eta' = \eta'', \quad \zeta' + \zeta'' + u^2 = 0.$$

При выполнении этих условий край поверхности  $\tilde{F}''$ , полученной изгибанием из  $F''$ , после зеркального отражения в плоскости  $xu$  совместится с краем поверхности  $\tilde{F}'$ , полученной изгибанием из  $F'$ , и образуется интересующая нас поверхность с ребром, изометричная сегменту.

В дальнейшем указанные выше условия для решений  $\tau'$  и  $\tau''$  на кривой  $u = 1 + \lambda \cos kv$  будут называться условиями сопряжения.

**2. Решение уравнений изгибания.** Общий план решения задачи об изгибании сегмента будет состоять в следующем. Прежде всего мы замечаем, что  $\zeta_0'' = -1$ . Это непосредственно вытекает из условия сопряжения

$$\zeta' + \zeta'' + u^2 = 0.$$

Что касается двух других составляющих  $\xi_0''$  и  $\eta_0''$ , то, не ограничивая общности, их можно принять равными нулю. Этого всегда можно добиться движением, параллельным плоскости  $xu$ .

Далее, мы определим изгибающие поля первого порядка  $\tau'_1, \tau''_1$  для поверхностей  $F', F''$ , и произволом, который при этом получается, распорядимся так, чтобы условия сопряжения выполнялись с точностью до величин порядка  $\lambda$ . Затем определяем изгибающие поля второго порядка, удовлетворяя условиям сопряжения с точностью до  $\lambda^2$ , и т. д.

Изгибающие поля первого порядка удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}\xi_u + u\xi_u &= 0, \\ \eta_v + \xi &= 0, \\ \xi_v - \eta + u\xi_v + a\eta_u &= 0.\end{aligned}$$

Если из этих трех уравнений исключить функции  $\xi$  и  $\eta$ , то для  $\zeta$  получается уравнение

$$\frac{\xi_{vv}}{u} + (u\xi_u)_u = 0.$$

Оно представляет собой уравнение Лапласа в полярных координатах  $u, v$ .

Будем искать решение уравнения для  $\zeta$  в виде тригонометрического ряда. При этом ввиду симметрии ожидаемого решения можно считать, что в этом разложении присутствуют только члены, содержащие косинусы дуг, кратных  $kv$ . Таким образом,

$$\zeta = \sum c_n(u) \cos nv,$$

где  $n$  принимает только целые кратные  $k$  значения. Общее решение для  $\zeta$  в такой форме имеет вид

$$\zeta = \sum \left( \frac{a_n}{u^n} + b_n u^n \right) \cos nv.$$

В случае изгибания поверхности  $F'$  надо положить  $a_0 = 0$  и  $b_n = 0$ , так как  $\zeta \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow \infty$ . Таким образом, для составляющей  $\zeta$  изгибающего поля  $\tau'$  поверхности  $F'$  получается выражение

$$\zeta = \sum \frac{a_n}{u^n} \cos nv,$$

где суммирование начинается с  $n > 0$  и идет по целым  $n$ , кратным  $k$ . По соображениям удобства мы придадим  $\zeta$

следующую форму:

$$\zeta = \sum (-a_n) \frac{n-1}{n} \frac{\cos nv}{u^n}.$$

Имея  $\zeta$ , нетрудно найти из уравнений изгиба две другие компоненты  $\xi$  и  $\eta$ . Получается

$$\xi = \sum a_n \frac{\cos nv}{u^{n-1}}, \quad \eta = \sum (-a_n) \frac{\sin nv}{nu^{n-1}}.$$

Постоянные интегрирования приняты равными нулю из-за предполагаемой симметрии изгиба.

В случае изгибающего поля  $\tau_1''$  поверхности  $F''$  в выражении

$$\zeta = \sum \left( \frac{a_n}{u^n} + b_n u^n \right) \cos nv$$

надо положить равными нулю постоянные  $a_n$ , так как  $\zeta$  должна быть ограничена в нуле (при  $u = 0$ ). Свободный член разложения  $b_0$  тоже можно считать равным нулю, так как он соответствует простому смещению поверхности, как целого, а это смещение учтено особо. Так же как и для поверхности  $F'$ , по соображениям удобства,  $\zeta$  для поверхности  $F''$  представляем в виде

$$\zeta = \sum (-b_n) \frac{n+1}{n} u^n \cos nv.$$

С помощью системы уравнений изгиба и полученного выражения для  $\zeta$  находим  $\xi$  и  $\eta$

$$\xi = \sum b_n u^{n+1} \cos nv, \quad \eta = \sum (-b_n) \frac{u^{n+1}}{n} \sin nv.$$

Найдем теперь решения, удовлетворяющие условиям сопряжения с точностью до величин порядка  $\lambda$ . Условия сопряжения можно записать в виде

$$\lambda \xi_1' + O(\lambda^2) = \lambda \xi_1'' + O(\lambda^2),$$

$$\lambda \eta_1' + O(\lambda^2) = \lambda \eta_1'' + O(\lambda^2),$$

$$\lambda \zeta_1' + \lambda \zeta_1'' + \zeta_0'' + 1 + 2\lambda \cos kv + O(\lambda^2) = 0.$$

( $\xi_0'' = -1$ ). Выделяя в этих равенствах члены, имеющие порядок  $\lambda$ , получим

$$\begin{aligned} \sum a_n \cos n\nu &= \sum b_n \cos n\nu, \\ \sum \left(-\frac{a_n}{n}\right) \sin n\nu &= \sum \left(-\frac{b_n}{n}\right) \sin n\nu, \\ \sum (-a_n) \frac{n-1}{n} \cos n\nu + \sum (-b_n) \frac{n+1}{n} \cos n\nu + 2 \cos k\nu &= 0. \end{aligned}$$

Из первых двух равенств следует, что

$$a_n = b_n.$$

Из третьего равенства получается при  $n > k$

$$a_n \frac{n-1}{n} + b_n \frac{n+1}{n} = 0,$$

а при  $n = k$

$$-a_k \frac{k-1}{k} - b_k \frac{k+1}{k} + 2 = 0.$$

Отсюда заключаем, что при  $n > k$  все  $a_n$  и  $b_n$  равны нулю, а при  $n = k$  они определяются из системы

$$a_k = b_k, \quad -a_k \frac{k-1}{k} - b_k \frac{k+1}{k} + 2 = 0.$$

Решение этой системы следующее:

$$a_k = b_k = 1.$$

Таким образом, чтобы удовлетворить условию сопряжения с точностью до величин порядка  $\lambda$ , надо взять изгибающие поля первого порядка в следующей форме.

Для поверхности  $F'$ :

$$\xi_1 = \frac{\cos k\nu}{u^{k-1}}, \quad \eta_1 = -\frac{\sin k\nu}{ku^{k-1}}, \quad \zeta_1 = -\frac{k-1}{k} \frac{\cos k\nu}{u^k},$$

Для поверхности  $F''$ :

$$\xi_1 = u^{k+1} \cos k\nu, \quad \eta_1 = -\frac{u^{k+1}}{k} \sin k\nu, \quad \zeta_1 = -\frac{k+1}{k} u^k \cos k\nu.$$

Обратимся теперь к изгибающим полям второго порядка. Они удовлетворяют системе

$$\xi_u + u\zeta_u + \frac{1}{2}\zeta_{1u}^2 = 0,$$

$$u(\eta_v + \xi) + \frac{1}{2}\zeta_{1v}^2 = 0,$$

$$\xi_v - \eta + u\zeta_v + u\eta_u + \zeta_{1u}\zeta_{1v} = 0.$$

Эта система неоднородна относительно искомых функций, и ее общее решение получается сложением какого-нибудь частного решения и общего решения соответствующей однородной системы. Последняя представляет собой систему уравнений для изгибающего поля первого порядка.

Добавками изгибающих полей первого порядка при получении общих решений для изгибающих полей второго порядка мы распорядимся таким образом, чтобы удовлетворить условиям сопряжения с точностью до величин порядка  $\lambda^2$ . Оказывается, эти добавки указанным условием определяются однозначно.

Опуская соответствующие выкладки, приведем выражения для компонент смещения  $\tau$  с точностью до величин второго порядка по параметру  $\lambda$ .

Для поверхности  $F'$ :

$$\xi = \frac{\lambda \cos kv}{u^{k-1}} + \lambda^2 \frac{(k-1)^2}{4u^{2k+1}} +$$

$$\eta = -\frac{\lambda \sin kv}{ku^{k-1}} -$$

$$\zeta = -\lambda \frac{k-1}{k} \frac{\cos kv}{u^k} + \lambda^2 \frac{(k-1)^2}{4u^{2k+2}} +$$

Для поверхности  $F''$ :

$$\xi = \lambda u^{k+1} \cos kv - \frac{\lambda^2}{4} (k+1)^2 u^{2k-1} +$$

$$\eta = -\frac{\lambda u^{k+1}}{k} \sin kv +$$

$$\zeta = -1 - \lambda \frac{k+1}{k} u^k \cos kv + \frac{\lambda^2}{4} (k+1)^2 u^{2k-2} - \frac{\lambda^2 k^2}{2} + \dots$$

Здесь всюду не выписаны члены вида

$$\lambda^2 A \cos 2kv, \quad \lambda^2 B \sin 2kv,$$

Они хотя и имеют порядок  $\lambda^2$ , но в наших дальнейших рассмотрениях несущественны.

**3. Определение некоторых величин для поверхности, полученной изгибанием сферического сегмента.** В п. 2 мы нашли выражения для компонент вектора смещения  $\tau$  точки сферического сегмента при его изгибании. Их значения получены с точностью до величин порядка  $\lambda^2$ . В дальнейшем нас будут интересовать некоторые интегральные выражения вида

$$J = \iint \varphi(\tau, \tau_u, \dots) du dv,$$

где интегрирование по  $v$  выполняется в пределах  $0, 2\pi$ . Очевидно, если мы возьмем  $\tau$  с точностью до величин порядка  $\lambda^2$ , то с такой же точностью мы получим и величину  $J$ .

Оказывается, если в выражении  $\tau$  опустить члены

$$\lambda^2 \cos 2kv, \quad \lambda^2 \sin 2kv,$$

то с точностью до величин порядка  $\lambda^2$  получается то же значение  $J$ . Действительно, связанное с этой операцией изменение подынтегральной функции будет иметь вид

$$\lambda^2 C' \cos 2kv + \lambda^2 C'' \sin 2kv + O(\lambda^3),$$

где  $C'$  и  $C''$  не зависят от  $v$ . А при интегрировании этого выражения получается величина порядка  $\lambda^3$ . Именно поэтому в конце предыдущего пункта мы привели упрощенное выражение для функций  $\xi, \eta, \zeta$ , опустив в них члены порядка  $\lambda^2$ , имеющие вид

$$\lambda^2 A \cos 2kv, \quad \lambda^2 B \sin 2kv.$$

Обозначим через  $\tilde{F}'$  и  $\tilde{F}''$  части изометричной сегменту поверхности, соответствующие по изометрии областям  $F'$  и  $F''$ . Найдем уравнения этих поверхностей. Так как нормированные компоненты смещения точки при изгибании сегмента равны  $\xi, \eta, \zeta$ , то истинные смещения будут

$$\rho^3 \xi, \quad \rho^3 \eta, \quad \rho^2 \zeta.$$

Поэтому уравнение поверхности  $\tilde{F}'$  можно записать так:

$$r = e_1(\rho u + \rho^3 \xi') + e_2(\rho^3 \eta') + e_3 \left( \frac{\rho^2 u^2}{2} + \rho^2 \zeta' \right),$$

$$u \geq 1 + \lambda \cos kv.$$



Соответственно уравнение поверхности  $\tilde{F}''$  будет

$$r = e_1(\rho u + \rho^3 \zeta'') + e_2(\rho^3 \eta'') - e_3 \left( \frac{\rho^2 u^2}{2} + \rho^2 \zeta'' \right),$$

$$u \leq 1 + \lambda \cos kv.$$

Ввиду того, что мы предполагаем параметр  $\rho$  достаточно малым, члены порядка  $\rho^3$  в уравнениях поверхностей можно опустить. Тогда получим:

для поверхности  $\tilde{F}'$

$$r = e_1(\rho u) + e_3 \left( \frac{\rho^2 u^2}{2} + \rho^2 \zeta' \right),$$

для поверхности  $\tilde{F}''$

$$r = e_1(\rho u) - e_3 \left( \frac{\rho^2 u^2}{2} + \rho^2 \zeta'' \right).$$

Поверхности  $\tilde{F}'$  и  $\tilde{F}''$ , образуя изометричную сегменту поверхность, разделены ребром  $\gamma$ . Определим угол  $\alpha$  при этом ребре между  $F'$  и  $F''$ . Для этого сначала найдем единичные векторы нормалей  $n'$  и  $n''$  поверхностей вдоль ребра.

Имеем

$$n' = \frac{r'_u \times r'_v}{|r'_u \times r'_v|}, \quad n'' = \frac{r''_u \times r''_v}{|r''_u \times r''_v|}.$$

Ввиду того, что поверхность  $\tilde{F}$  получается изометрическим преобразованием сегмента  $F$ , знаменатели этих формул в точках ребра  $\gamma$  имеют то же значение, что и для сегмента. А для него при малых  $\rho$

$$|r_u \times r_v| \simeq \rho^2 u.$$

Вычислим производные вектора  $r'$  по  $u$  и  $v$ . Имеем

$$r'_u = e_1 \rho + e_3 \rho^2 (u + \zeta_u),$$

$$r'_v = e_2 \rho u + e_3 \rho^2 \zeta_v.$$

Отсюда, определяя векторное умножение равенствами

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2,$$

получим

$$r'_u \times r'_v = e_3(\rho^2 u) - e_2(\rho^3 \zeta'_v) - e_1(\rho^3 u^2 + \rho^3 u \zeta'_u).$$

Аналогично находим

$$r''_u \times r''_v = e_3(\rho^2 u) + e_2(\rho^3 \zeta''_v) + e_1(\rho^3 u^2 + \rho^3 u \zeta''_u).$$

Таким образом,

$$n' = e_3 - e_2 \left( \frac{\rho}{u} \zeta'_v \right) - e_1 \rho (u + \zeta'_u),$$

$$n'' = e_3 + e_2 \left( \frac{\rho}{u} \zeta''_v \right) + e_1 \rho (u + \zeta''_u).$$

А теперь, принимая во внимание, что

$$(n' \times n'')^2 = \sin^2 \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол при ребре  $\gamma$ , находим

$$\sin^2 \alpha = \rho^2 \left\{ \left( \frac{\zeta'_v + \zeta''_v}{u} \right)^2 + (2u + \zeta'_u + \zeta''_u)^2 \right\} +$$

где не выписаны члены, имеющие порядок  $\rho^4$ . Ввиду малости  $\rho$  с той же точностью ( $\rho^4$ ) имеем

$$\alpha^2 = \rho^2 \left\{ \left( \frac{\zeta'_v + \zeta''_v}{u} \right)^2 + (2u + \zeta'_u + \zeta''_u)^2 \right\} +$$

Найдем кривизну ребра  $\gamma$  на поверхности  $\tilde{F}$ . Ее можно выразить через геодезическую кривизну  $k_g$  и угол при ребре. Ввиду изометрии поверхностей  $F$  и  $\tilde{F}$  геодезическую кривизну  $k_g$  можно вычислять на исходной поверхности. При этом очевидно, что при малом  $\rho$  геодезическая кривизна  $k_g$ , с точностью до величин более высокого порядка относительно  $\rho$ , равна обычной кривизне кривой на плоскости, заданной в полярных координатах уравнением

$$r = \rho(1 + \lambda \cos kv).$$

Последняя вычисляется по известной формуле и для нее получается следующее выражение:

$$k_g = \frac{1}{\rho} \frac{\left| 1 + \lambda(2 + k^2) \cos kv + \frac{\lambda^2}{2}(1 + 3k^2) \right|}{\left( 1 + 2\lambda \cos kv + \frac{\lambda^2}{2}(1 + k^2) \right)^{3/2}} +$$

Здесь не выписаны члены порядка выше  $\lambda^2$  и члены порядка  $\lambda^2$  вида

$$\lambda^2 A \cos 2kv, \quad \lambda^2 B \sin 2kv.$$

Ввиду малости  $\rho$ ,  $\alpha \sim \rho$ , и можно считать, что для кривизны  $k$  ребра на поверхности  $\tilde{F}$  имеем

$$k \simeq k_g.$$

Это равенство переходит в точное при  $\rho \rightarrow 0$ .

Вычислим элемент дуги  $ds$  вдоль ребра  $\gamma$  поверхности  $\tilde{F}$ . Принимая во внимание изометрию поверхностей  $\tilde{F}$  и  $F$ , при малых  $\rho$  элемент дуги  $ds$  вдоль ребра  $\gamma$  можно вычислять по формуле

$$ds = ds_e +$$

где  $ds_e$  — элемент дуги кривой, заданной в полярных координатах уравнением

$$r = \rho(1 + \lambda \cos kv),$$

а невыписанные члены имеют более высокий порядок малости по  $\rho$ . Таким образом,

$$ds = \rho \left[ (1 + 2\lambda \cos kv) + \frac{\lambda^2}{2}(1 + k^2) \right]^{1/2} dv.$$

В дальнейшем нам понадобится средняя кривизна поверхности  $\tilde{F}$ . Вычислим ее. По известной формуле средняя кривизна поверхности равна

$$H = \frac{1}{2} \frac{LG - 2FM + NE}{EG - F^2},$$

где  $E, F, G, L, M, N$  — коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности. Что касается коэффициентов первой квадратичной формы, то они те же, что и у исходной поверхности (сферического сегмента). Следовательно, при

малом  $\rho$

$$E = \rho^2, \quad F = 0, \quad G = \rho^2 u^2.$$

Найдем коэффициенты  $L$  и  $N$  второй квадратичной формы. Для поверхности  $\tilde{F}'$

$$r_{uu} = e_3 (\rho^2 + \rho^2 \zeta_{uu}),$$

$$n = e_3 - e_2 \left( \frac{\rho}{u} \zeta_v \right) - e_1 (\rho u + \rho \zeta_u).$$

Отсюда

$$L = r_{uu} n = \rho^2 + \rho^2 \zeta_{uu}.$$

Аналогично получается

$$N = r_{vv} n = \rho^2 \zeta_{vv} + \rho^2 u (u + \zeta_u).$$

Для поверхности  $\tilde{F}''$  получаются такие же выражения коэффициентов  $L$  и  $N$ , только со своей функцией  $\zeta$  и противоположным знаком.

Подставляя полученные выражения коэффициентов квадратичных форм поверхности в формулу для средней кривизны, находим:

для поверхности  $\tilde{F}'$

$$H = \frac{1}{2u^2} \{ u^2 (1 + \zeta_{uu}) + \zeta'_{vv} + u (u + \zeta'_u) \},$$

для поверхности  $\tilde{F}''$

$$H = - \frac{1}{2u^2} \{ u^2 (1 + \zeta''_{uu}) + \zeta''_{vv} + u (u + \zeta''_u) \}.$$

В заключение заметим еще, что гауссова кривизна поверхности  $\tilde{F}$  равна гауссовой кривизне исходной поверхности, следовательно, она постоянна и равна единице.

4. Энергия деформации оболочки. Для энергии деформации оболочки в § 1 мы получили следующую формулу (стр. 33):

$$U = \int_{\gamma} c E \delta^{3/2} \alpha^{1/2} k^{1/2} ds_{\gamma} + \frac{E \delta^3}{6(1-\nu^2)} \int_{\gamma} \alpha \left( -k_n + \frac{k_l + k_e}{2} \right) ds_{\gamma} + \frac{E \delta^3}{24(1-\nu^2)} \int_{\tilde{F}} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2) d\sigma.$$

Будем обозначать для краткости слагаемые правой части этой формулы через  $U'$ ,  $U''$  и  $U'''$  соответственно, и вычислим последовательно каждое из этих слагаемых.

Величины, входящие в формулу для  $U'$ , вычислены нами в п. 2. Следует, однако, иметь в виду, что полученные там значения относятся к сфере единичного радиуса. Поэтому для рассматриваемой оболочки, радиус кривизны которой мы будем обозначать  $R$ , линейные величины необходимо увеличить в  $R$  раз.

В п. 3 для угла  $\alpha_\gamma$ , образованного касательными плоскостями поверхности  $\tilde{F}$  вдоль ребра  $\gamma$ , получено следующее выражение:

$$\alpha_\gamma^2 = \rho^2 \left\{ \left( \frac{\zeta'_v + \zeta''_v}{u} \right)^2 + (2u + \zeta'_u + \zeta''_u)^2 \right\}.$$

Принимая во внимание, что угол  $\alpha$ , входящий в слагаемое  $U'$ , в два раза меньше  $\alpha_\gamma$ , будем иметь

$$\alpha^2 = \rho^2 \left\{ \left( \frac{\zeta'_v + \zeta''_v}{2u} \right)^2 + \left( u + \frac{\zeta'_u + \zeta''_u}{2} \right)^2 \right\}.$$

Подставляя сюда

$$u = 1 + \lambda \cos kv,$$

$$\zeta'_v = - \frac{\lambda(k-1)}{k} \frac{\cos kv}{u^k} + \frac{\lambda^2(k-1)^2}{4u^{2k+2}} +$$

$$\zeta''_v = -1 - \frac{\lambda(k+1)}{k} u^k \cos kv + \frac{\lambda^2(k+1)^2}{4} u^{2k-2} - \frac{\lambda^2 k^2}{2} + \dots,$$

будем иметь

$$\alpha^2 = \rho^2 \left( 1 + \frac{\lambda^2 k^2}{2} + \dots \right).$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем в аналогичных случаях, не выписаны члены порядка выше  $\lambda^2$  и члены порядка  $\lambda^2$  вида

$$\lambda^2 A \cos 2kv, \quad \lambda^2 B \sin 2kv.$$

Вычислим теперь

$$\sqrt{k} ds.$$

Принимая во внимание полученные в п. 2 выражения для  $k$  и  $ds$ , найдем

$$\sqrt{k} ds = \sqrt{\rho} \frac{\left| 1 + \lambda (k^2 + 2) \cos kv + \frac{\lambda^2}{2} (3k^2 + 1) \right|^{1/2}}{\left( 1 + 2\lambda \cos kv + \frac{\lambda^2}{2} (k^2 + 1) \right)^{1/4}} dv.$$

Если правую часть равенства разложить по степеням  $\lambda$ , опустив члены порядка выше  $\lambda^2$  и несущественные члены порядка  $\lambda^2$ , то получим

$$\sqrt{k} ds = \sqrt{\rho} \left\{ 1 + \frac{\lambda}{2} (k^2 + 1) \cos kv + \lambda^2 \left( \frac{3k^2}{8} - \frac{1+k^2}{16} \right) \right\} dv.$$

Для сферы радиуса  $R$  результат надо умножить на  $\sqrt{R}$ . Таким образом, для рассматриваемой оболочки имеем

$$\sqrt{k} ds = \sqrt{\rho R} \left\{ 1 + \frac{\lambda}{2} (k^2 + 1) \cos kv + \lambda^2 \left( \frac{3k^2}{8} - \frac{1+k^2}{16} \right) \right\} dv.$$

Подставляя значения  $\alpha$  и  $\sqrt{k} ds$  в формулу для  $U'$ , получим

$$U' = 2\pi c E \delta^{3/2} R^{1/2} \rho^3 \left\{ 1 + \lambda^2 \left( k^2 - \frac{(1+k^2)^2}{16} \right) \right\}.$$

Займемся теперь выражением  $U''$ . В связи с этим прежде всего найдем нормальные кривизны  $k_i$  и  $k_e$ .

Как известно, нормальные кривизны вычисляются по формуле

$$k = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2},$$

где  $E, F, G, L, M, N$  — коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности. Для рассматриваемой нами поверхности  $\tilde{F}$ , полученной изгибанием сферического сегмента, мы имеем

$$E = \rho^2, \quad F = 0, \quad G = \rho^2 u^2.$$

Что касается коэффициентов второй квадратичной формы, то для поверхности  $\tilde{F}'$  будет

$$L' = \rho^2 (1 + \zeta'_{uu}),$$

$$M' = \rho^2 \left( \zeta'_{uv} - \frac{\zeta'_v}{u} \right),$$

$$N' = \rho^2 (\zeta'_{vv} + u^2 + u \zeta'_u).$$

А для поверхности  $\tilde{F}''$  имеем

$$L'' = -\rho^2 (1 + \zeta''_{uu}),$$

$$M'' = -\rho^2 \left( \zeta''_{uv} - \frac{\zeta''_v}{u} \right),$$

$$N'' = -\rho^2 (\zeta''_{vv} + u^2 + u\zeta''_u).$$

Так как кривая  $\gamma$  в координатах  $u, v$  задается уравнением

$$u = 1 + \lambda \cos kv,$$

то ее направление в произвольной точке  $u, v$  будет

$$du : dv = -\lambda k \sin kv : 1.$$

Следовательно, перпендикулярное направление, то есть направление, в котором измеряются нормальные кривизны  $k_l$  и  $k_e$ , будет

$$du : dv = u^2 : (\lambda k \sin kv).$$

Подставляя полученные значения коэффициентов квадратичных форм и  $du, dv$  в формулу для нормальных кривизн  $k_l, k_e$  и удерживая только существенные члены, получим

$$k_e = 1 + \zeta'_{uu} + 2(\zeta'_{uv} - \zeta'_v) \lambda k \sin kv +$$

$$k_l = -1 - \zeta''_{uv} - 2(\zeta''_{uv} - \zeta''_v) \lambda k \sin kv +$$

Отсюда

$$k_l + k_e = (\zeta'_{uu} - \zeta''_{uu}) + 2\lambda k (\zeta'_{uv} - \zeta''_{uv}) \sin kv - \\ - 2\lambda k (\zeta'_v - \zeta''_v) \sin kv +$$

Все это относится к сегменту единичной кривизны; для рассматриваемой оболочки полученное значение  $k_l + k_e$  надо разделить на радиус  $R$ .

Элемент дуги кривой  $\gamma$  равен

$$ds_\gamma = R\rho (\lambda^2 k^2 \sin^2 kv + u^2)^{1/2} dv = \\ = R\rho \left\{ u \left( 1 + \frac{\lambda^2 k^2}{4} + \right) \right\} dv.$$

Принимая во внимание найденные выражения для  $\alpha$ ,  $k_i + k_e$  и  $ds_\nu$ , находим

$$\int_V \alpha (k_i + k_e) ds_\nu = 0.$$

Таким образом,

$$U'' = -\frac{E\delta^3}{6(1-\nu^2)} \frac{1}{R} \int_V \alpha ds_\nu.$$

Подставляя сюда выражения  $\alpha$  и  $ds_\nu$ , получим

$$U'' = -\frac{2\pi E\delta^3 \rho^2}{6(1-\nu^2)} \left(1 + \frac{\lambda^2 k^2}{2}\right).$$

Вычислим теперь выражение

$$U''' = \frac{E\delta^3}{24(1-\nu^2)} \int_{\tilde{F}} \int (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2) d\sigma.$$

Чтобы упростить выкладк будем считать коэффициент Пуассона  $\nu = 0$ . Имеем

$$\Delta k_1 = \frac{1}{R} - k_1, \quad \Delta k_2 = \frac{1}{R} - k_2,$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — главные кривизны поверхности  $\tilde{F}$ . Отсюда на единицу площади поверхности получим

$$\bar{U}''' = \frac{E\delta^3}{24} \left( \frac{2}{R^2} - 2K - \frac{4H}{R} + 4H^2 \right),$$

где  $K$  — гауссова, а  $H$  — средняя кривизна поверхности  $\tilde{F}$ . Так как при изгибании поверхности ее гауссова кривизна не изменяется, то

$$K = \frac{1}{R^2}.$$

Следовательно,

$$\bar{U}''' = \frac{E\delta^3}{6} \left( H^2 - \frac{H}{R} \right).$$

В п. 3 для средней кривизны  $H$  поверхности  $\tilde{F}'$  нашли выражение

$$H = 1 + \frac{\zeta'_{uu}}{2} + \frac{\zeta'_{vv}}{2u^2} + \frac{\zeta'_u}{2u}.$$



Так как наша оболочка имеет радиус  $R$ , то она при подобном изгибании будет иметь среднюю кривизну

$$H = \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{\zeta'_{uu}}{2} + \frac{\zeta'_{vv}}{2u^2} + \frac{\zeta'_u}{2u} \right).$$

Средняя кривизна поверхности  $\tilde{F}''$  вычисляется по той же формуле, но со своей функцией  $\zeta$  и с противоположным знаком.

Положим

$$U_1''' = \frac{E\delta^3}{6} \int \int_{\tilde{F}'} \left( H^2 - \frac{H}{R} \right) d\sigma,$$

$$U_2''' = \frac{E\delta^3}{6} \int \int_{\tilde{F}''} \left( H^2 - \frac{H}{R} \right) d\sigma.$$

Так как элемент площади единичной сферы равен  $\rho^2 u du dv$ , то для рассматриваемой оболочки элемент площади будет

$$d\sigma = R^2 \rho^2 u du dv,$$

поэтому

$$U_1''' = \frac{E\delta^3}{6} \int \int \left( H^2 - \frac{H}{R} \right) R^2 \rho^2 u du dv,$$

где интегрирование выполняется по области переменных определяемой неравенством

$$u > 1 + \lambda \cos kv.$$

Для удобства предстоящих выкладок преобразуем подынтегральное выражение в  $U_1'''$  следующим образом:

$$H^2 - \frac{H}{R} = \left( H - \frac{1}{R} \right)^2 + \frac{1}{R} \left( H - \frac{1}{R} \right).$$

Для  $\tilde{F}'$  имеем

$$\zeta = -\frac{\lambda(k-1)}{k} \frac{\cos kv}{u^k} + \frac{\lambda^2(k-1)^2}{4u^{2k+2}}.$$

Следовательно,

$$H = \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{\lambda^2(k-1)^2}{2u^{2k+4}} + \dots \right).$$

Положим

$$u(v) = 1 + \lambda \cos kv.$$

Тогда

$$\int_{u(v)}^{\infty} \left( \frac{H}{R} - \frac{1}{R^2} \right) R^2 \rho^2 u \, du = \frac{\lambda^2 \rho^2}{4} (k-1)^2 (k+1) +$$

$$\int_{u(v)}^{\infty} \left( H - \frac{1}{R} \right)^2 R^2 \rho^2 u \, du = 0 +$$

Отсюда

$$\int_{\bar{F}'} \int \left( \frac{H}{R} - \frac{1}{R^2} \right) d\sigma = \frac{\pi \lambda^2 \rho^2}{2} (k-1)^2 (k+1) +$$

$$\int_{\bar{F}'} \int \left( H - \frac{1}{R} \right)^2 d\sigma = 0 +$$

Следовательно, с точностью до величин порядка  $\lambda^2$  будет

$$U_1''' = \frac{E\delta^3}{12} \pi \lambda^2 \rho^2 (k-1)^2 (k+1).$$

Величина  $U_2'''$  вычисляется аналогично. Для нее получается следующее выражение:

$$U_2''' = \frac{\pi \rho^2 E \delta^3}{6} \left\{ 2 + \lambda^2 \left[ 1 + \frac{3}{2} (k+1)^2 (k-1) \right] \right\}.$$

Таким образом,

$$U''' = \frac{\pi \rho^2 E \delta^3}{6} (2 + \lambda^2 (2k^3 - 2k + k^2)).$$

Суммируя слагаемые  $U'$ ,  $U''$  и  $U'''$ , находим следующее выражение для энергии деформации:

$$U = 2\pi c E \delta^{3/2} R^{1/2} \rho^3 \left\{ 1 + \lambda^2 \left( k^2 - \frac{(1+k^2)^2}{16} \right) \right\} +$$

$$+ \frac{\pi \rho^2 E \delta^3 \lambda^2}{3} (k^3 - k).$$

**5. Работа внешней нагрузки при деформации оболочки.** Мы будем рассматривать два случая нагружения оболочки: 1) нагружение сосредоточенной силой  $f$  и 2) равномерное нагружение внешним давлением  $p$ .

При нагружении сосредоточенной силой  $f$ , действующей по внутренней нормали сегмента в его центре, производимая

ею работа равна

$$A = fh,$$

где  $h$  — прогиб в центре выпучивания. Принимая во внимание уравнение поверхности  $\tilde{F}$ , полученное в п. 3, видим, что

$$h = R\rho^2 \left( 1 + \frac{\lambda^2 k^2}{2} \right).$$

Следовательно,

$$A = fR\rho^2 \left( 1 + \frac{\lambda^2 k^2}{2} \right).$$

В случае равномерного внешнего давления  $p$  на оболочку для производимой им работы  $A$  имеем

$$A = pV,$$

где  $V$  — изменение (при деформации) объема, ограниченного оболочкой.

Изменение объема равно

$$V = \int_{\tilde{F}} \int \Delta z \, d\sigma,$$

где  $\Delta z$  — прогиб оболочки в направлении оси  $z$  при деформации ее в форму  $\tilde{F}$ . На поверхности  $\tilde{F}'$

$$\Delta z = \rho^2 \zeta'.$$

На поверхности  $\tilde{F}''$

$$\Delta z = -(u^2 \rho^2 + \rho^2 \zeta'').$$

Для вычисления величины  $V$  удобно разбить ее на две части  $V'$  и  $V''$ , соответственно разбиению области интегрирования кривой  $u = 1 + \lambda \cos kv$ . Вычислим величину  $V'$ . Имеем

$$V' = \int_0^{2\pi} \int_{u(v)}^{\infty} \rho^4 \zeta' u \, du \, dv.$$

Подставляя сюда

$$\zeta' = -\frac{\lambda(k-1)}{k} \frac{\cos kv}{u^k} + \frac{\lambda^2(k-1)^2}{4u^{2k+2}} +$$

получим с точностью до величин порядка  $\lambda^2$  следующее выражение для  $V'$ :

$$V' = \pi \lambda^2 \rho^4 \left( \frac{k-1}{k} + \frac{(k-1)^2}{4k} \right).$$

Вычислим объем  $V''$ . Имеем

$$V'' = \int_0^{2\pi} \int_0^{u(v)} -\rho^4 (u^2 + \zeta'') u \, du \, dv.$$

Подставляя сюда

$$\zeta'' = -1 - \frac{\lambda(k+1)}{k} u^k \cos kv + \frac{\lambda^2(k+1)^2}{4} u^{2k-2} - \frac{\lambda^2 k^2}{2} + \dots$$

получим

$$V'' = \frac{\pi \rho^4}{2} + \pi \lambda^2 \rho^4 \left\{ -1 + \frac{k+1}{k} - \frac{(k+1)^2}{4k} + \frac{k^2}{2} \right\}.$$

Складывая  $V'$  и  $V''$ , находим  $V$ :

$$V = \frac{\pi \rho^4}{2} (1 + \lambda^2 k^2).$$

Для оболочки радиуса  $R$  этот результат надо умножить на  $R^3$ . Таким образом, изменение ограничиваемого оболочкой объема равно

$$V = \frac{\pi \rho^4 R^3}{2} (1 + \lambda^2 k^2).$$

Следовательно, производимая внешним давлением  $p$  работа равна

$$A = \frac{\pi \rho^4 R^3}{2} (1 + \lambda^2 k^2) p.$$

**6. Об устойчивости осесимметрических деформаций сферической оболочки.** Опыт показывает, что сферическая оболочка под действием сосредоточенной силы испытывает осесимметрическую деформацию до определенного момента. Когда же действующая сила достигает некоторого критического значения, осевая симметрия деформации постепенно утрачивается. Область выпучивания вместо круга принимает сначала форму треугольника со сглаженными вершинами, затем четырехугольника и т. д.

Аналогично обстоит дело и в случае равномерного нагружения. Значительная деформация, не стесняемая близостью края, отличается от осесимметрической и имеет звездное строение. Мы исследуем условия перехода к деформациям, не обладающим осевой симметрией, приняв в качестве начальных осесимметрические деформации.

Критическая осесимметрическая деформация характеризуется наличием близких форм равновесия, не обладающих осевой симметрией. Мы будем искать эти формы среди изометрических преобразований, построенных в п. 2.

Согласно принципу А, закритическое состояние равновесия под данной нагрузкой определяется из условия стационарности функционала

$$W = U - A$$

на множестве изометрических преобразований исходной формы. В рассматриваемом случае

$$U = 2\pi c E \delta^{1/2} R^{1/2} \rho^3 \left\{ 1 + \lambda^2 \left( k^2 - \frac{(1+k^2)^2}{16} \right) \right\} + \\ + \frac{\pi \rho^2 E \delta^3 \lambda^2}{3} (k^3 - k).$$

При нагружении оболочки сосредоточенной силой  $f$  в центре сегмента работа равна

$$A = f R \rho^2 \left( 1 + \frac{\lambda^2 k^2}{2} \right).$$

Для оболочки, находящейся в состоянии равновесия, параметры  $\rho$  и  $\lambda$ , характеризующие деформацию, определяются из системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (U - A) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} (U - A) = 0.$$

При фиксированном  $\rho$  эта система относительно  $f$  и  $\lambda$  всегда имеет решение с  $\lambda = 0$  (осесимметрическая деформация). Если  $\rho$  достаточно мало, то это решение будет единственным. Это значит, что при малой деформации область выпучивания имеет форму круга. Напротив, при больших деформациях (то есть при больших  $\rho$ ) система допускает решение с  $\lambda \neq 0$ . Значение  $\rho$ , разграничивающее эти два случая, определяет критическую осесимметрическую деформацию.

Таким образом, оно определяется условиями

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (U - A)|_{\lambda=0} = 0, \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} (U - A)|_{\lambda=0} = 0.$$

Подставляя в эти уравнения выражения  $U$  и  $A$ , получим

$$\begin{aligned} 6\pi c E \delta^{1/2} R^{1/2} \rho^2 - 2f\rho R &= 0, \\ 2\pi c E \delta^{1/2} R^{1/2} \rho^3 \left( k^2 - \frac{(1+k^2)^2}{16} \right) + \frac{\pi \rho^2 E \delta^3}{3} (k^3 - k) - \frac{f R \rho^2 k^2}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Умножая первое уравнение на  $\rho k^2$ , второе на 4 и вычитая почленно, будем иметь

$$\pi c E \delta^{1/2} R^{1/2} \rho^3 \frac{(k^2 - 1)^2}{2} + \frac{4}{3} \pi \rho^2 E \delta^3 k (1 - k^2) = 0.$$

Отсюда

$$\rho = \frac{8}{3c} \frac{k}{k^2 - 1} \sqrt{\frac{\delta}{R}}.$$

Обозначим через

$$r = R\rho$$

радиус круга выпучивания и введем параметр

$$\varepsilon = \frac{R\delta}{r^2}.$$

Принимая во внимание полученное выше значение для  $\rho$ , находим соответствующее ему значение  $\varepsilon$ :

$$\sqrt{\varepsilon} = \frac{3c(k^2 - 1)}{8k}.$$

Следовательно, при деформациях, удовлетворяющих условию

$$\sqrt{\varepsilon} \geq \frac{3c(k^2 - 1)}{8k},$$

выпучивание оболочки в форме круга является устойчивым по отношению к возмущениям, которые определяются параметром  $k$ .

Следует, однако, заметить, что этот вывод мы можем сделать только по отношению к возмущениям, отвечающим небольшим значениям  $k$ , так как  $\sqrt{\varepsilon} > 1$  при больших  $k$ . А определение энергии деформации на границе выпучивания предполагает достаточную малость параметра  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ ).

Опыт показывает, что потеря устойчивости осесимметрической формы выпучивания обычно происходит с переходом к звездной форме с тремя вершинами ( $k=3$ ). Поэтому мы можем считать форму выпучивания осесимметрической при

$$\rho \leq \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\delta}{R}}$$

Для радиуса круга выпучивания  $r = R\rho$  получим

$$r \leq \frac{1}{c} \sqrt{R\delta}.$$

Найдем теперь силу  $f$ , при которой область выпучивания начинает принимать звездную форму с тремя вершинами ( $k=3$ ). В момент перехода к звездной форме выпучивания в состоянии равновесия оболочки действующая сила  $f$  с параметром выпучивания  $\rho$  связана соотношением

$$6\pi c E \delta^{3/2} R^{1/2} \rho^2 - 2f\rho R = 0.$$

Отсюда находим значение

$$f = \frac{3\pi E \delta^3}{R}.$$

Когда действующая сила достигает этой величины, область выпучивания начинает принимать звездную форму с тремя вершинами.

Полученный результат об устойчивости осесимметрических деформаций сферической оболочки при нагружении сосредоточенной силой был подвергнут экспериментальной проверке.

Испытуемый сферический сегмент свободно опирался на стальное кольцо (рис. 15). Действие сосредоточенной силы  $P$  в виде груза нескольких стальных шайб передавалось через вертикальный стержень на испытываемую оболочку. Оболочка освещалась источником света  $S$ . Блик вдоль параболической линии на границе выпучивания наблюдался и фотографировался. При постепенном увеличении

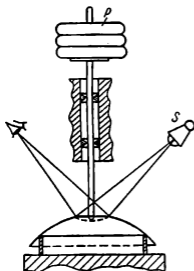


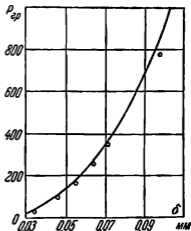
Рис. 15.

груза  $P$  отмечался момент, когда начинается переход от выпучивания в форме круга к форме «треугольника».

Результаты экспериментального исследования представлены на рис. 16. Здесь сплошная линия изображает полуценную выше зависимость критической силы  $P$  от толщины оболочки

$$P = \frac{3\pi E \delta^3}{R}$$

для медных оболочек радиуса  $R = 80$  мм. Отдельные точки дают значения критической силы для оболочек различной толщины, над которыми проводился эксперимент. Видно, что экспериментальное значение величины  $P$  близко к ее теоретическому значению.



Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости осесимметрической деформации сферической оболочки при нагружении равномерным внешним давлением  $p$ .

Так же как при сосредоточенном нагружении, в момент перехода к звездной форме выпучивания выполняются условия

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(U - A)\Big|_{\lambda=0} = 0, \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda}(U - A)\Big|_{\lambda=0} = 0,$$

$$A = \frac{\pi \rho^4 R^3}{2} (1 + \lambda^2 k^2) p,$$

а  $U$  имеет прежнее значение. Подставляя в эти условия значения  $U$  и  $A$ , будем иметь

$$6\pi c E \delta^{3/2} R^{1/2} \rho^2 - 2\pi \rho^3 R^3 p = 0,$$

$$2\pi c E \delta^{3/2} R^{1/2} \rho^3 \left( k^2 - \frac{(1 + k^2)^2}{16} \right) + \\ + \frac{\pi \rho^2 E \delta^3}{3} (k^3 - k) - \frac{\pi \rho^4 R^3 k^2 p}{2} = 0.$$



Отсюда находим значение  $\rho$ , отвечающее критической деформации

$$\rho = \frac{8}{3c} \frac{k}{k^2 - 1} \sqrt{\frac{\delta}{R}}.$$

Любопытно, что это значение  $\rho$  имеет точно такое же значение, как и в случае сосредоточенного нагружения.

Обозначая, как и раньше, через  $r = \rho R$  радиус круга выпучивания, будем иметь

$$r = \frac{8}{3c} \frac{k}{k^2 - 1} \sqrt{R\delta}.$$

Или, принимая во внимание, что переход к звездной форме выпучивания происходит при  $k = 3$  (к звездной форме с тремя вершинами), имеем

$$r = \frac{1}{c} \sqrt{R\delta}.$$

Полученный результат об устойчивости осесимметрической деформации сферической оболочки можно представить в более обозримой форме, если вместо радиуса  $r$  круга выпучивания ввести прогиб в центре  $2h$ . Имеем

$$2h = \frac{r^2}{R}.$$

Подставляя сюда критическое значение  $r$ , определяемое по формуле

$$r = \frac{1}{c} \sqrt{R\delta},$$

получим критический прогиб

$$2h = \frac{1}{c^2} \delta.$$

Отсюда

$$\frac{2h}{\delta} = \frac{1}{c^2} \simeq 28.$$

Итак, *закритическая деформация пологой сферической оболочки под действием сосредоточенной силы или равномерного внешнего давления является осесимметрической до тех пор, пока прогиб  $2h$  в центре области выпучивания удовлетворяет условию*

$$\frac{2h}{\delta} \leq \frac{1}{c^2} \simeq 28.$$

7. О нижней критической нагрузке для пологой сферической оболочки при равномерном внешнем давлении. В § 2 мы получили ряд формул, относящихся к закритическим деформациям сферических оболочек. Применение этих формул ограничивалось рядом условий весьма общего и неопределенного содержания, гарантирующих по существу осесимметричность рассматриваемых закритических деформаций. Теперь, когда условия устойчивости осесимметричности деформаций нами выяснены, область применимости указанных формул может быть оценена более определенно.

Для пологого сферического сегмента с кривизной  $1/R$ , радиусом основания  $r$  и толщиной  $\delta$  в предположении неограниченной упругости материала оболочки была получена (стр. 55) следующая формула для нижней критической нагрузки:

$$p_l = 3cE \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \sqrt{\frac{\delta R}{r^2}}.$$

Поскольку при

$$r \leq \frac{1}{c} \sqrt{R\delta}$$

деформации являются заведомо осесимметричными, то при таких  $r$  применение указанной формулы не надо ограничивать никакими условиями, в том числе можно не настаивать и на особой жесткости закреплении края.

Итак, для пологих, неограниченно упругих сферических сегментов, у которых отношение высоты сегмента  $h$  к толщине  $\delta$  удовлетворяет условию

$$\frac{h}{\delta} \leq 14,$$

нижняя критическая нагрузка при равномерном внешнем давлении определяется по формуле

$$p_l = 3cE \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \sqrt{\frac{\delta R}{r^2}}.$$

Или, что то же самое,

$$p_l = 3cE \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \sqrt{\frac{\delta}{2h}}.$$

Для сферических оболочек, обладающих ограниченной упругостью, была выведена (стр. 71) следующая формула для

нижней критической нагрузки при внешнем давлении:

$$p_1 = 3cc'E \left( \frac{\delta}{R} \right)^3 \left( \frac{E}{\sigma_s} \right).$$

Эта формула получена из того условия, что закритические деформации ограниченно упругих оболочек останавливаются при появлении на границе выпучивания пластических деформаций от изгиба, то есть из условия

$$c'E \frac{r}{R} \left( \frac{\delta}{R} \right)^{1/2} = \sigma_s, \quad (*)$$

где  $r$  — радиус круга выпучивания. Посмотрим, когда определяемая этим условием деформация является осесимметрической. Подставляя в условие (\*) критическое значение

$$r = \frac{1}{c} \sqrt{R\delta},$$

получим

$$\frac{c'}{c} E \frac{\delta}{R} = \sigma_s.$$

Таким образом, рассматриваемые деформации будут осесимметрическими, если

$$\frac{R}{\delta} < \frac{c'E}{c\sigma_s}.$$

Итак, применение формулы

$$p_1 = 3cc'E \left( \frac{\delta}{R} \right)^3 \left( \frac{E}{\sigma_s} \right)$$

для нижней критической нагрузки ограниченно упругих сферических оболочек при внешнем давлении ограничивается условием

$$\frac{R}{\delta} < \frac{c'E}{c\sigma_s}.$$

Рассмотрим для примера стальную оболочку. Полагая

$$\sigma_s = 4 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2, \quad E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2,$$

$$c' \simeq 0,9, \quad c \simeq 0,19,$$

получим

$$\frac{R}{\delta} < 2500.$$

## ГЛАВА ВТОРАЯ

### ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТРОГО ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК

Настоящая глава посвящена исследованию устойчивости строго выпуклых оболочек при различных способах нагружения. Основу нашего метода рассмотрения вопроса составляют следующие два соображения:

1) Воспринимаемая оболочкой нагрузка в момент потери устойчивости стационарна и, следовательно, мало изменяется при заметном выпучивании оболочки.

2) При значительном выпучивании деформацию оболочки вне окрестности границы области выпучивания можно считать геометрическим изгибанием.

Исходя из этих соображений, мы сформулируем и обоснуем некоторый общий принцип, который затем будем применять к решению конкретных задач. Именно, в § 1 мы рассмотрим потерю устойчивости пологих строго выпуклых оболочек под внешним давлением, а в § 3 потерю устойчивости оболочек вращения. Указанный принцип, будем называть его «принцип В», связан с принципом А (гл. I, § 1) и сводит рассмотрение вопроса об устойчивости оболочек к решению некоторой вариационной задачи для функционала, определенного на бесконечно малых изгибаниях исходной поверхности оболочки.

#### § 1. Потеря устойчивости строго выпуклых оболочек под внешним давлением

Как указано выше, решение задачи об устойчивости оболочек в нашем рассмотрении будет основано на некотором общем принципе. В настоящем параграфе мы дадим обоснование этого принципа и применим его к исследованию вопроса

об устойчивости пологих строго выпуклых оболочек, дующихся под внешним давлением.

1. Энергия деформации оболочки. Пусть упругая оболочка  $F$  находится под действием некоторой нагрузки  $q$ , которую пока уточнять не будем. Если нагрузка мала, то упругое состояние оболочки среди форм, близких к  $F$ , определяется однозначно. Будем увеличивать нагрузку  $q$ . Тогда может наступить такой момент, когда указанным условием близости упругое состояние оболочки однозначно не определяется. Именно, наряду с основной формой упругого равновесия оболочки, для которой деформированная поверхность оболочки остается близка к первоначальной форме ( $F$ ) и при дальнейшем увеличении нагрузки, существуют другие формы, которые развиваются практически без увеличения действующей нагрузки, причем это развитие сопровождается значительными изменениями внешней формы оболочки. Нагрузка, при которой имеет место указанная неоднозначность упругих состояний оболочки, называется *критической*. Наименьшая критическая нагрузка называется *верхней критической нагрузкой*.

Отмеченная специфика упругих состояний оболочки под действием критической нагрузки — значительные изменения формы при стационарной нагрузке — позволяет свести задачу об определении таких нагрузок к рассмотрению закритических состояний оболочки и применить методы, развитые в гл. 1, к изучению этих состояний.

Пусть потеря устойчивости оболочки под действием данной нагрузки сопровождается выпучиванием области  $G$ , ограниченной кривой  $\gamma$ . Исходя из наглядного представления о характере выпучивания, мы полагаем, что существенные деформации оболочка испытывает лишь в окрестности границы области  $G$ , а вне этой окрестности форма деформированной оболочки близка к первоначальной. При этом естественно считать, что энергия деформированной оболочки сосредоточена в указанной окрестности. Для определения этой энергии мы воспользуемся теми же соображениями, что и при рассмотрении существенно закритических деформаций в § 1 гл. 1.

Отождествляя изометрическое преобразование исходной поверхности с самой этой поверхностью и воспроизводя

рассуждения § 1 гл. 1, получим такое же по форме, как и там, выражение для  $\bar{U}_\gamma$  — энергии деформации оболочки на единицу длины  $\gamma$  (границы области  $G$ ). Именно,

$$\bar{U} = \frac{D}{2} \int_{-\bar{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} v''^2 ds + \frac{D'}{2} \int_{-\bar{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} \frac{u^2}{\rho^2} ds.$$

Соответствующая формула (стр. 29) для существенно заkritических деформаций содержала еще два слагаемых

$$D \int_{-\bar{\varepsilon}}^{\bar{\varepsilon}} \Delta k v'' ds + D\bar{\varepsilon} \Delta k^2.$$

В данном случае эти слагаемые равны нулю, так как изометрическое преобразование  $F$  в  $\tilde{F}$  является тождественным и, следовательно,  $\Delta k = 0$ . Напомним, что в формуле для  $U_\gamma$  величины  $u$  и  $v$  обозначают смещения (при деформации) соответственно по направлению главной нормали и бинормали кривой  $\gamma$  той точки поверхности, к которой  $\bar{U}_\gamma$  относится, а через  $D$  и  $D'$  обозначены жесткости оболочки на изгиб и растяжение — сжатие соответственно. Перемещения  $u, v$  связаны соотношением

$$u' + \alpha v' + \frac{v'^2}{2} = 0,$$

где  $\alpha$  — угол между соприкасающейся плоскостью кривой  $\gamma$  и касательной плоскостью поверхности.

Так же как в § 1 гл. 1, вместо переменных  $u, v$ , вводим новые переменные  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{s}$  согласно формулам

$$\bar{u} = \frac{u}{\varepsilon \rho^2}, \quad \bar{v} = \frac{v'}{\alpha}, \quad \bar{s} = \frac{s}{\rho \varepsilon},$$

$$\varepsilon^4 = \frac{\delta^2}{12\rho^2\alpha^2}.$$

Здесь  $\rho$  — радиус кривизны кривой  $\gamma$ ,  $\delta$  — толщина оболочки.

В новых переменных, черту над которыми для простоты записи опускаем, мы получим

$$\bar{U} = \frac{E\delta^{3/2}\alpha^{3/2}\rho^{-1/2}}{2 \cdot 12^{3/4}(1-\nu^2)} \int_{-\bar{\epsilon}^*}^{\bar{\epsilon}^*} (v'^2 + u^2) ds.$$

Пределы интегрирования  $\bar{\epsilon}^*$  и  $-\bar{\epsilon}^*$  неограниченно растут по абсолютной величине вместе с  $\rho/\delta$ . Поэтому, ограничиваясь случаем таких оболочек и деформаций, для которых  $\delta/\rho\alpha$  мало, пределы интегрирования можно заменить на  $\pm\infty$ . Тогда

$$\bar{U} = \frac{E\delta^{3/2}\alpha^{3/2}\rho^{-1/2}}{2 \cdot 12^{3/4}(1-\nu^2)} \int_{-\infty}^{\infty} (v'^2 + u^2) ds.$$

Как всегда, будем предполагать симметрию функции  $v(s)$  и антисимметрию  $u(s)$ . Тогда можно ограничиться интегрированием в пределах  $(0, \infty)$ . Поэтому

$$\bar{U} = \frac{E\delta^{3/2}\alpha^{3/2}\rho^{-1/2}}{12^{3/4}(1-\nu^2)} \int_0^{\infty} (v'^2 + u^2) ds.$$

Условимся обозначать ту часть области  $G$ , которая расположена вне рассматриваемой окрестности кривой  $\gamma$ , через  $A_1$ , саму окрестность — через  $A_{12}$ , а оставшуюся часть оболочки — через  $A_2$ . Найденное нами выражение для энергии  $\bar{U}$  существенно зависит от формы оболочки в переходной зоне  $A_{12}$ , которая (форма) определяется функциями  $u$ ,  $v$ , задающими деформацию. Так же, как при исследовании закритических деформаций в гл. 1, энергию  $\bar{U}$  мы определим из условия минимума при заданной общей деформации. Эту деформацию мы характеризуем прогибом  $h$  в области продавливания вблизи данной точки кривой  $\gamma$ , к которой (точке) энергия  $\bar{U}$  относится. Все это приобретает точный смысл, когда ширина переходной зоны  $A_{12}$  неограниченно убывает.

В исходных переменных  $v$  и  $s$  величина  $h$  допускает очевидное представление

$$h = - \int_{-\epsilon^*}^{\epsilon^*} v' ds.$$

Если перейти к новым переменным и пределы интегрирования  $\bar{\epsilon}^*$  и  $-\bar{\epsilon}^*$  заменить на  $\pm \infty$ , то получим

$$h = -\frac{1}{12^{1/4}} \sqrt{\delta\rho\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} v \, ds$$

или, учитывая предполагаемую симметрию функции  $v(s)$ ,

$$h = -\frac{2}{12^{1/4}} \sqrt{\delta\rho\alpha} \int_0^{\infty} v \, ds.$$

Таким образом, энергия  $\bar{U}$ , а следовательно, и функции  $u$ ,  $v$ , от которых она зависит, определяются из условия минимума функционала

$$\bar{U} = \frac{E\delta^{3/2}\alpha^{5/2}\rho^{-1/2}}{12^{3/4}(1-v^2)} \int_0^{\infty} (v'^2 + u^2) \, ds$$

при добавочном ограничении

$$-\frac{2}{12^{1/4}} \sqrt{\delta\rho\alpha} \int_0^{\infty} v \, ds = h = \text{const.}$$

Варьируемые функции  $u$ ,  $v$ , помимо указанной интегральной связи, удовлетворяют еще соотношению

$$u' + v + \frac{v^2}{2} = 0 \quad (*)$$

и обращаются в нуль на бесконечности.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала  $\bar{U}$ . В связи с этим прежде всего преобразуем связь

$$-\frac{2\sqrt{\delta\rho\alpha}}{12^{1/4}} \int_0^{\infty} v \, ds = h$$

при помощи соотношения (\*). Если это соотношение проинтегрировать в пределах  $(-\infty, \infty)$  и учесть при этом, что  $u(-\infty) = u(\infty) = 0$ , то получим

$$-\int_{-\infty}^{\infty} v \, ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2}{2} \, ds.$$



Отсюда, принимая во внимание симметрию функции  $v(s)$ , получим

$$-\int_0^{\infty} v \, ds = \int_0^{\infty} \frac{v^2}{2} \, ds.$$

Следовательно, интегральная связь, которой подчинена функция  $v(s)$ , может быть представлена в виде

$$\frac{\sqrt{\delta \rho \alpha}}{12^{1/4}} \int_0^{\infty} v^2 \, ds = h.$$

Итак, наша вариационная задача состоит в определении минимума функционала

$$\bar{U} = \frac{E \delta^{3/2} \alpha^{1/2} \rho^{-1/2}}{12^{3/4} (1 - \nu^2)} \int_0^{\infty} (v'^2 + u^2) \, ds$$

при условиях

$$\frac{\sqrt{\delta \rho \alpha}}{12^{1/4}} \int_0^{\infty} v^2 \, ds = h = \text{const},$$

$$u' + v + \frac{v^2}{2} = 0, \quad (*)$$

$$u(0) = u(\infty) = v(\infty) = 0.$$

Поскольку нас интересует начальная стадия закритической деформации, то в соотношении (\*) слагаемым  $v^2/2$  можно пренебречь, придав, таким образом, этому соотношению совсем простую форму

$$u' + v = 0.$$

Если теперь всюду заменить  $v$  на  $-u'$ , то мы приходим к задаче о минимуме функционала

$$\bar{U} = \frac{E \delta^{3/2} \alpha^{1/2} \rho^{-1/2}}{12^{3/4} (1 - \nu^2)} \int_0^{\infty} (u'^2 + u^2) \, ds$$

с интегральной связью

$$\frac{\sqrt{\delta \rho \alpha}}{12^{1/4}} \int_0^{\infty} u'^2 \, ds = h = \text{const}$$

и краевых условиях для варьируемой функции

$$u(0) = u(\infty) = 0.$$

Согласно методу Эйлера — Лагранжа, наша вариационная задача сводится к рассмотрению безусловного экстремума функционала

$$W = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{E\delta^{3/2}\alpha^{3/2}\rho^{-1/2}}{12^{3/4}(1-v^2)} (u^2 + u'^2) - \lambda \frac{\sqrt{\delta\rho\alpha}}{12^{1/4}} u'^2 \right\} ds,$$

где  $\lambda$  — некоторое постоянное.

Полагая для краткости

$$\sigma = \frac{\sqrt{12}(1-v^2)\rho\lambda}{E\alpha^2\delta^2},$$

жем считать, что речь идет об экстремуме функционала

$$J = \int_0^{\infty} (u^2 + u'^2 - \sigma u'^2) ds,$$

который отличается от  $W$  только постоянным множителем.

Уравнение Эйлера — Лагранжа для функционала  $J$  будет

$$u^{IV} + u + \sigma u'' = 0.$$

Его общее решение —

$$u(s) = \sum c_k e^{\omega_k s},$$

где  $\omega_k$  — корни характеристического уравнения

$$\omega^4 + 1 + \sigma\omega^2 = 0.$$

Для того чтобы удовлетворить краевому условию  $u(\infty) = 0$ , надо, чтобы среди характеристических корней  $\omega_k$  были два корня с отрицательной вещественной частью. Если эти корни обозначить  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , то решение нашей вариационной задачи дает функция  $u(s)$  вида

$$u = c_1 e^{\omega_1 s} + c_2 e^{\omega_2 s}.$$

Для того чтобы удовлетворить и второму краевому условию

$$u(0) = 0,$$

надо потребовать, чтобы

$$c_1 = -c_2 = c.$$

При этом для функции  $u(s)$  получается выражение

$$u = c(e^{\omega_1 s} - e^{\omega_2 s}).$$

Подставим найденную функцию в выражение функционала  $\bar{U}$  и в связь. Тогда получим

$$\int_0^{\infty} u'^2 ds = -c^2 \left( \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2} - \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \right),$$

$$\int_0^{\infty} u^2 ds = -c^2 \left( \frac{1}{2\omega_1} + \frac{1}{2\omega_2} - \frac{2}{\omega_1 + \omega_2} \right),$$

$$\int_0^{\infty} u''^2 ds = -c^2 \left( \frac{\omega_1^3}{2} + \frac{\omega_2^3}{2} - \frac{2\omega_1^2\omega_2^2}{\omega_1 + \omega_2} \right).$$

Замечая, что в нашем случае корни  $\omega_1$  и  $\omega_2$  попарно сопряжены и равны единице по абсолютной величине, можем записать

$$\omega_1 = e^{i\vartheta}, \quad \omega_2 = e^{-i\vartheta}.$$

Подстановка этих значений в наши интегралы дает

$$\int_0^{\infty} u'^2 ds = c^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta},$$

$$\int_0^{\infty} (u^2 + u''^2) ds = c^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} (2 + 4 \cos^2 \vartheta).$$

Отсюда

$$\bar{U} = \frac{E\delta^{3/2}\alpha^{3/2}\rho^{-1/2}}{12^{3/4}(1-\nu^2)} c^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} (2 + 4 \cos^2 \vartheta),$$

$$h = \frac{\sqrt{\delta\rho\alpha}}{12^{3/4}} c^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta}.$$

Следовательно,

$$\bar{U} = \frac{E\delta^2\alpha^2 h}{\sqrt{12}(1-\nu^2)\rho} (2 + 4 \cos^2 \vartheta).$$

Минимум  $\bar{U}$  при  $h = \text{const}$  достигается при  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ . И мы получаем следующее окончательное выражение для энергии деформации:

$$\bar{U} = \frac{2E\delta^2 a^2 h}{\sqrt{12}(1-v^2)\rho}.$$

## 2. Формулировка принципа В и его обоснование.

Пусть потеря устойчивости оболочки под действием данной нагрузки сопровождается выпучиванием области  $G$ , ограниченной кривой  $\gamma$ . Так же как и при рассмотрении существенно закритических деформаций в гл. 1, будем приближать форму оболочки после потери устойчивости и заметном выпучивании изометрическим преобразованием исходной поверхности. Принимая во внимание, что существенные деформации оболочка испытывает лишь в окрестности границы выпучивания, мы представляем себе, что это изометрическое преобразование сопровождается появлением двух ребер  $\gamma'$  и  $\gamma''$ , близких к  $\gamma$  (рис. 17). Если  $\gamma'$  и  $\gamma''$  являются плоскими кривыми, то примером такого изометрического преобразования является зеркальное отражение области, ограниченной кривой  $\gamma''$ , с последующим зеркальным отражением ее части, ограниченной кривой  $\gamma'$ . Чтобы сократить обозначения, предположим, что кривая  $\gamma''$  совпадает с  $\gamma$ . Кроме того, для определенности будем считать, что кривая  $\gamma'$  расположена внутри области  $G$  и ограничивает область  $G'$ .

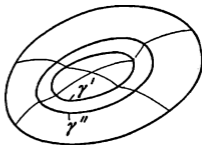


Рис. 17.

Рассмотрим задачу об изометрическом преобразовании поверхности  $F$  с продавливанием области  $G'$  и образованием ребер вдоль кривых  $\gamma$  и  $\gamma'$ .

Некоторую неопределенность этой задачи мы устраним требованием, чтобы искомая поверхность внутри области  $G'$  и вне области  $G$  была одинаково ориентирована с  $F$ , а в области  $G$  вне области  $G'$  имела противоположную ориентацию.

Если кривая  $\gamma'$  совпадает с  $\gamma$ , то задача имеет тривиальное решение. Изометрически преобразованная поверхность

есть сама поверхность  $F$ . Естественно предположить, что при достаточной близости кривых  $\gamma$  и  $\gamma'$  изометрическое преобразование поверхности  $F$  отличается существенными деформациями только в полосе между этими кривыми. Что касается остальной части поверхности, то здесь конечные изгибания могут быть заменены бесконечно малыми.

Имея в виду конкретные приложения, мы не будем выяснять строение преобразованной поверхности в полосе между кривыми  $\gamma$  и  $\gamma'$ , так как в действительности деформация в этой полосе для упругой оболочки определяется энергетическими соображениями. Изгибание указанной полосы мы охарактеризуем некоторым общим свойством, которое позволит нам выяснить условия сопряжения бесконечно малых изгибаний вне области  $G$  и внутри области  $G'$  при переходе к пределу:

$$\gamma' \rightarrow \gamma.$$

Пусть  $P$  — произвольная точка на кривой  $\gamma$ . Проведем из этой точки внутрь области  $G$  геодезический перпендикуляр до пересечения с кривой  $\gamma'$  в точке  $P'$ . Пусть  $s$  — длина этого перпендикуляра. При переходе от поверхности  $F$  к изометрически преобразованной поверхности точки  $P$  и  $P'$  получают смещения  $\tau_P$  и  $\tau_{P'}$ , где  $\tau$  и  $\tau'$  обозначают изгибающие поля поверхности  $F$  в соответствующих областях. Определим разность  $\tau_P - \tau_{P'}$ , предполагая достаточную близость кривых  $\gamma$  и  $\gamma'$ .

Образование ребра по линии  $\gamma$  при изометрическом преобразовании поверхности  $F$  сопровождается поворотом касательной плоскости около касательной к кривой  $\gamma$ . При переходе к пределу  $\gamma' \rightarrow \gamma$  этот поворот сводится к зеркальному отражению в соприкасающейся плоскости кривой  $\gamma$ . Отсюда следует, что при достаточной близости кривых  $\gamma$  и  $\gamma'$  вектор  $\tau_P - \tau_{P'}$  можно считать направленным перпендикулярно соприкасающейся плоскости кривой  $\gamma$ , то есть по бинормали этой кривой. Тогда

$$\tau_P - \tau_{P'} = \sigma e,$$

где  $e$  — единичный вектор бинормали. Что касается множителя  $\sigma$ , то при малом угле  $\alpha$  между соприкасающейся плоскостью кривой  $\gamma$  и касательными плоскостями поверхности он равен  $2\alpha s$ .

Как указано выше, в связи с предстоящими приложениями нас будет интересовать случай близких кривых  $\gamma'$  и  $\gamma$ . В связи с этим мы переходим к пределу  $\gamma' \rightarrow \gamma$ . Теперь задача об изгибании поверхности  $F$  состоит в том, чтобы найти поля бесконечно малых изгибаний — поле  $\tau'$  внутри области  $G$  и  $\tau$  — вне этой области, которые на общей границе областей  $\gamma$  удовлетворяют условию

$$\tau - \tau' = \sigma e. \quad (*)$$

Здесь  $e$  — единичный вектор бинормали кривой  $\gamma$ , а  $\sigma$  — некоторая функция, заданная на этой кривой. Условие (\*) мы будем называть условием сопряжения.

Зная изгибающие поля  $\tau$  и  $\tau'$ , мы знаем форму деформированной оболочки вне окрестности границы выпучивания  $\gamma$ , следовательно, мы можем определить энергию деформации  $U$  и производимую внешней нагрузкой работу  $A$ . Действительно, в выражении энергии деформации  $\bar{U}$  (п. 1) содержится величина  $h$  — прогиб в области выпучивания вблизи границы  $\gamma$  (точнее, изменение прогиба при переходе через границу). Этот прогиб есть не что иное, как величина  $\sigma$ , входящая в условие сопряжения полей  $\tau$  и  $\tau'$ . Таким образом, можно считать, что энергия деформации определяется изгибающими полями. Далее, поскольку изгибающие поля определяют в основном форму деформированной оболочки, то при заданной нагрузке они определяют производимую этой нагрузкой работу при деформации.

Мы видим, что состоянию упругого равновесия оболочки с выпучиванием под действием критической нагрузки соответствует поле бесконечно малого изгибания с разрывами вдоль некоторых линий, которое, как обычно, сообщает функционалу

$$W = U - A$$

стационарное значение.

Таким образом, мы приходим к следующему принципу В.

*Если действующая на оболочку нагрузка критическая, то вариационная задача для функционала*

$$W = U - A$$

*на разрывных бесконечно малых изгибаниях срединной поверхности оболочки имеет нетривиальное решение,*

то есть изгибающее поле, являющееся решением, равно нулю тождественно.

Функционал  $W$  определен на полях бесконечно малых изгибов с разрывами, удовлетворяющими условию

$$\tau - \tau' = \sigma e,$$

где  $\tau - \tau'$  — разрыв изгибающего поля, а  $e$  — единичный вектор бинормали кривой  $\gamma$ , вдоль которой происходит разрыв.

Слагаемое  $U$  функционала  $W$  определяется по формуле

$$U = \int_{\gamma} \frac{2E \delta^2 \alpha^2 \sigma}{\sqrt{12} (1 - \nu^2) \rho} ds.$$

Здесь  $\rho$  — радиус кривизны кривой  $\gamma$ , где происходит разрыв изгибающего поля;  $\alpha$  — угол между соприкасающейся плоскостью кривой  $\gamma$  и касательной плоскостью поверхности;  $\sigma$  — составляющая разрыва изгибающего поля по бинормали кривой  $\gamma$ ,  $\delta$  — толщина оболочки,  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Интегрирование выполняется по дуге  $s$  кривой  $\gamma$ .

Слагаемое  $A$  функционала  $W$  определяется обычным образом как производимая внешней нагрузкой работа при деформации, задаваемой изгибающим полем.

Решение задачи по определению критической нагрузки с помощью принципа В сопряжено с известными трудностями, так как мы не знаем ни линий разрыва для изгибающего поля, ни характера разрыва (функцию  $\sigma$ ). Однако, в конкретных задачах мы можем получить соответствующую информацию из данных опыта и таким образом устранить указанное затруднение.

В заключение мы хотим обратить внимание еще на одно обстоятельство, связанное с применением принципа В. Если действующая на оболочку нагрузка сосредоточена вдоль некоторой линии и потеря устойчивости происходит так, что эта линия оказывается в окрестности границы выпучивания, то, определяя работу  $A$ , производимую нагрузкой, необходимо учитывать форму деформированной оболочки в указанной окрестности. Как это следует делать, мы покажем в п. 5 на конкретном примере потери устойчивости пологой оболочки вращения под действием нормального внешнего давления, равномерно распределенного вдоль некоторой параллели.

3. Определение критической нагрузки для строго выпуклых оболочек при равномерном внешнем давлении. Пусть строго выпуклая оболочка, жестко закрепленная по краю, находится под внешним давлением  $p$ . Когда давление достигает критического значения, оболочка теряет устойчивость и начинает выпучиваться. Пусть  $G$  — область выпучивания и  $\gamma$  — ограничивающая ее кривая. Согласно принципу В, при критическом нагружении вариационная задача для функционала

$$W = U - A,$$

определяемого на бесконечно малых изгибаниях с разрывом непрерывности вдоль  $\gamma$ , имеет нетривиальное решение. Воспользуемся этим свойством критической нагрузки для ее определения.

Прежде всего, мы ограничим класс изгибающих полей, на которых рассматривается функционал  $W$ . Для этого воспользуемся условием жесткости закрепления оболочки вдоль края.

Пусть  $\tau'$  — изгибающее поле вне области  $G$ , а  $\tau$  — изгибающее поле внутри этой области. На границе  $\gamma$  области  $G$  поля  $\tau$  и  $\tau'$  удовлетворяют условию сопряжения

$$\tau - \tau' = \sigma e,$$

где  $e$  — единичный вектор бинормали кривой  $\gamma$ . В силу жесткости закрепления края поверхности мы должны считать поле  $\tau'$  на краю поверхности равным нулю. А тогда по известной теореме оно равно нулю на всей поверхности, то есть вне области  $G$ . Отсюда, принимая во внимание условие сопряжения полей  $\tau'$  и  $\tau$ , заключаем, что на кривой  $\gamma$

$$\tau = \sigma e.$$

Известна теорема, согласно которой удовлетворяющее этому условию изгибающее поле  $\tau$  либо равно нулю тождественно, если кривая  $\gamma$  не плоская\*), либо оно есть поле скоростей движения поверхности как целого, если кривая  $\gamma$  плоская. В последнем случае это движение представляет

\*) Вообще говоря, в том виде, как она здесь сформулирована, эта теорема для неплоской кривой  $\gamma$  неверна. Но, исходя из наглядной картины деформации, можно считать, что кривая  $\gamma$  мало отличается от плоской кривой, и что  $\sigma \approx \text{const}$ , а при таких условиях соответствующие бесконечно малые изгибания мало отличаются от тривиальных. (Прим. ред.)



собой вращение около прямой, лежащей в плоскости кривой  $\gamma$ ; в частности, это может быть сдвиг в направлении, перпендикулярном этой плоскости.

Таким образом, жесткость закрепления края поверхности предопределяет форму области выпучивания и характер изгибающих полей. Именно, область выпучивания ограничена плоской кривой, причем вне этой области изгибающее поле  $\tau' = 0$ , а внутри области изгибающее поле  $\tau = a \times r + b$ , где  $r$  — радиус-вектор поверхности,  $a$  и  $b$  — постоянные векторы.

Заметим, что приближение формы деформированной оболочки бесконечно малым изометрическим преобразованием, которое мы получили, есть по существу приближение двукратным зеркальным отражением. Здесь роль кривых  $\gamma'$  и  $\gamma''$ , близких к  $\gamma$ , играют плоские кривые. Изометрическое преобразование состоит в зеркальном отражении области, ограниченной кривой  $\gamma'$ , в плоскости этой кривой, и затем зеркальное отражение ее части, ограниченной кривой  $\gamma''$ , в плоскости последней



Рис. 18.

(рис. 18).

Введем систему декартовых координат, приняв касательную плоскость поверхности, параллельную плоскости кривой  $\gamma$ , за плоскость  $xu$ , а точку касания  $P$  — за начало координат. Оси координат  $x$  и  $u$  направим по главным направлениям поверхности в точке  $P$ . Так как поле  $\tau = a \times r + b$ , то для его составляющей  $\zeta$  по оси  $z$  получим

$$\zeta = c_1 x + c_2 u + h,$$

где  $x$ ,  $u$  — координаты точки, в которой вычисляется эта составляющая, а  $c_1$ ,  $c_2$  и  $h$  — постоянные.

Предположим теперь, что область выпучивания мала. В этом случае она имеет форму эллипса, подобного индикатрисе кривизны в точке  $P$ , и ее граница  $\gamma$  может быть задана уравнениями:

$$x = \lambda \sqrt{R_1} \cos t, \quad u = \lambda \sqrt{R_2} \sin t.$$

Здесь  $R_1$  и  $R_2$  — главные радиусы кривизны в центре выпучивания  $P$ , а  $\lambda$  — параметр, характеризующий размеры области выпучивания.

Вычислим энергию деформации оболочки. Имеем (стр. 109)

$$U = \int_{\gamma} \frac{2E \delta^2 \alpha^2 \rho}{\sqrt{12} (1 - \nu^2) \rho} ds.$$

Здесь  $\alpha$  — угол между плоскостью кривой  $\gamma$  и касательной плоскостью поверхности вдоль кривой,  $\rho$  — радиус кривизны кривой  $\gamma$ , а  $\zeta$  — прогиб в области выпучивания вдоль кривой  $\gamma$ .

Определим величины  $\alpha$  и  $\rho$ , входящие в формулу для энергии деформации  $U$ . Имеем

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{\lambda (R_1 \sin^2 t + R_2 \cos^2 t)^{3/2}}.$$

По формуле Менье угол

$$\alpha \simeq \rho k_n,$$

где  $k_n$  — нормальная кривизна поверхности оболочки в направлении касательной кривой  $\gamma$ . По формуле Эйлера кривизна

$$k_n = \frac{1}{R_1} \left( \frac{R_1 \sin^2 t}{R_1 \sin^2 t + R_2 \cos^2 t} \right) + \frac{1}{R_2} \left( \frac{R_2 \cos^2 t}{R_1 \sin^2 t + R_2 \cos^2 t} \right),$$

$$k_n = \frac{1}{R_1 \sin^2 t + R_2 \cos^2 t}.$$

Элемент дуги кривой  $\gamma$  равен

$$ds = \lambda (R_1 \sin^2 t + R_2 \cos^2 t)^{1/2} dt.$$

Подставляя найденные значения в формулу для  $U$ , получим

$$U = \int_0^{2\pi} \frac{2E \delta^2 \zeta^2 \lambda^2 dt}{\sqrt{12} (1 - \nu^2) \sqrt{R_1 R_2}},$$

$$U = \frac{4\pi E \delta^2 h \lambda^2}{\sqrt{12} (1 - \nu^2) \sqrt{R_1 R_2}}.$$

Вычислим теперь производимую внешней нагрузкой работу  $A$ . Имеем

$$A = Qh.$$

Здесь  $Q$  — суммарная нагрузка, действующая на область выпучивания, а  $h$  — прогиб в центре выпучивания  $P$ . Очевидно,

$$Q = pS,$$

где  $S$  — площадь области выпучивания, а  $p$  — давление. В рассматриваемом случае площадь  $S$ , как площадь эллипса с полуосями  $\lambda \sqrt{R_1}$  и  $\lambda \sqrt{R_2}$ , равна

$$\pi \lambda^2 \sqrt{R_1 R_2}.$$

Следовательно,

$$A = Qh = pSh = \pi p \sqrt{R_1 R_2} h \lambda^2.$$

Теперь из условия равновесия

$$d(U - A) = 0$$

находим воспринимаемую оболочкой нагрузку. Имеем

$$d \left\{ \frac{4\pi E \delta^2 h \lambda^2}{\sqrt{12} (1 - \nu^2) \sqrt{R_1 R_2}} - \pi p \sqrt{R_1 R_2} h \lambda^2 \right\} = 0.$$

Отс

$$p = \frac{2E}{\sqrt{3} (1 - \nu^2)} \frac{\delta^2}{R_1 R_2}.$$

Как и следовало ожидать, нагрузка  $p$  стационарна по отношению к параметру  $h \lambda^2$ , характеризующему выпучивание.

Итак, верхнее критическое давление  $p_e$  для пологий строго выпуклой оболочки, жестко закрепленной по краю, определяется по формуле

$$p_e = \frac{2E}{\sqrt{3} (1 - \nu^2)} \frac{\delta^2}{R_1 R_2},$$

где  $R_1, R_2$  — главные радиусы кривизны оболочки,  $\delta$  — толщина ее,  $E$  и  $\nu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Заметим, что  $1/R_1 R_2$  есть гауссова кривизна. Поэтому формулу можно записать еще и в таком виде:

$$p_e = \frac{2E \delta^2 K}{\sqrt{3} (1 - \nu^2)},$$

где  $K$  — гауссова кривизна срединной поверхности оболочки.

Для сферической оболочки радиуса  $R$  имеем

$$R_1 = R_2 = R,$$

и формула для величины критического давления принимает вид

$$p_e = \frac{2E}{\sqrt{3} (1 - \nu^2)} \left( \frac{\delta}{R} \right)^2.$$

Ввиду того,

$$1 - \nu^2 \simeq 1,$$

эта формула дает по существу хорошо известный результат для сферических оболочек

$$p_e = \frac{2E}{\sqrt{3} (1 - \nu^2)} \left( \frac{\delta}{R} \right)^2$$

Приведенное рассмотрение вопроса о критической нагрузке при равномерном внешнем давлении на пологую оболочку существенно опирается на предположение о жесткости закрепления края. В § 3 мы снова обратимся к этому вопросу. Не предполагая особой жесткости закрепления края, мы будем исходить из некоторых естественных предположений о характере выпучивания, подсказываемых опытом. Любопытно, что критическое давление при этом получится то же самое.

Из формулы, определяющей величину воспринимаемого оболочкой давления при выпучивании, мы видим, что эта величина не зависит от параметра  $h\lambda^2$ , характеризующего деформацию, в частности, от размера области выпучивания (параметр  $\lambda$ ). Отсюда естественно сделать вывод, что при неравномерном, но медленно меняющемся внешнем давлении на оболочку критическая нагрузка определяется величиной максимального давления.

**4. Влияние начальной погиби оболочки на устойчивость.** Определение критической нагрузки для строго выпуклых оболочек, находящихся под внешним давлением, было предметом многочисленных экспериментальных исследований. Экспериментировали обычно со сферическими оболочками. Результаты этих исследований, как правило, не давали определенного критического давления. Единственно, что неизменно наблюдалось, это то, что критическое давление, получаемое в эксперименте, всегда меньше теоретического значения  $p_e$ , определяемого по формуле

$$p_e = \frac{2E}{\sqrt{3} (1 - \nu^2)} \left( \frac{\delta}{R} \right)^2$$

Основной причиной, снижающей величину критического давления, является несовершенство формы реальной оболочки или, как говорят, начальная погибь. Тщательно поставленные эксперименты с точно изготовленными сферическими сегментами показывают, что теоретическое значение критического давления реализуется. Так, например, в эксперименте по определению нижней критической нагрузки, который описан

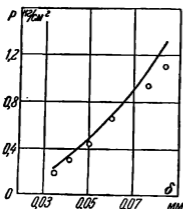


Рис. 19.

в § 2 гл. 1, определялось также верхнее критическое давление, при котором оболочка теряла устойчивость.

На рис. 19 дана кривая зависимости верхнего критического давления

$$p_c = \frac{2E}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} \left(\frac{\delta}{R}\right)^2$$

от толщины  $\delta$  для медных оболочек радиуса  $R = 80$  мм. Отдельные точки дают критическое значение давления, полученное в описанном эксперименте. Для простоты модуль

упругости принят равным  $1 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>. Если учесть фактическое значение модуля  $E$ , то теоретическая кривая практически пройдет через экспериментальные точки.

То, что истинное критическое давление для реальной оболочки, имеющей начальную погибь, может быть значительно ниже теоретического значения, вызывает серьезные затруднения при проектировании оболочек, так как это значение нельзя принять за расчетное. Естественным выходом из этого положения было бы принять в качестве расчетной нагрузки нижнюю критическую нагрузку. Эта нагрузка определяется значительными деформациями и поэтому менее чувствительна к несовершенствам формы оболочки. Если принять нижнюю критическую нагрузку за расчетную, то потеря устойчивости оболочки полностью исключается, так как воспринимаемая оболочкой нагрузка при закритической деформации больше нижней критической.

Указанное решение вопроса о расчетной нагрузке является простым и надежным. Однако оно не может быть принято по причине очень малого значения нижней критической на-

грузки. Рассмотрим это на примере оболочки, имеющей форму пологого сферического сегмента, находящегося под внешним давлением. Для него верхнее критическое давление  $p_e$  определяется по формуле

$$p_e = \frac{2E}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} \left(\frac{\delta}{R}\right)^2$$

где  $R$  — радиус кривизны оболочки, а  $\delta$  — ее толщина. Что касается нижнего критического давления, то оно равно

$$p_i = 3cE \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \sqrt{\frac{\delta}{2h}},$$

где  $h$  — высота сегмента, а постоянная  $c \simeq 0,19$ . Отсюда

$$\frac{p_i}{p_e} \simeq 0,5 \sqrt{\frac{\delta}{2h}}.$$

Мы видим, что уже при  $h = 8\delta$   $p_i/p_e \simeq 0,1$ , то есть нижнее критическое значение составляет 0,1 от верхнего.

Приемлемым решением вопроса о расчетной нагрузке было бы определение ее как нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости с учетом начальной погиби. Сейчас мы сделаем попытку определить такую нагрузку применительно к случаю нагружения пологой строго выпуклой оболочки внешним давлением.

В § 2 гл. 1 для величины воспринимаемой оболочкой нагрузки  $p$  при выпучивании на высоту  $2h$  получена формула

$$p = 3cEH \sqrt{K} \delta^2 \sqrt{\frac{\delta}{2h}}, \quad (*)$$

где  $K$  — гауссова, а  $H$  — средняя кривизна оболочки. Естественно предположить, что при наличии у оболочки начальной погиби, соответствующей форме выпучивания, она потеряет устойчивость при давлении, которое определяется этой формулой. Таким образом, при начальной погиби  $2h$  мы предлагаем определять критическое давление  $p$  по формуле (\*), считая его расчетным.

Следует заметить, что формула (\*) выведена нами в предположении достаточной малости параметра  $\delta/2h$ . Поэтому и применять ее можно только при наличии значительной начальной погиби.

Для сферической оболочки формула (\*) имеет вид

$$p = 3cE \left( \frac{\delta}{R} \right)^2 \sqrt{\frac{\delta}{2h}} \equiv kE \left( \frac{\delta}{R} \right)^2$$

На прилагаемом графике (рис. 20) представлена зависимость безразмерного коэффициента  $k$  в зависимости от начальной погиби  $2h/\delta$ .

Из этого графика видно, что высокая точность изготовления оболочки вряд ли оправдывается ориентировкой на значения критического давления, близкие к теоретическому.

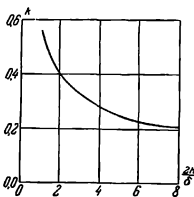


Рис. 20.

**5. Потеря устойчивости оболочки и критические нагрузки в других случаях нагружения внешним давлением.** Как показано выше, полученный нами результат о потере устойчивости при нагружении строго выпуклой оболочки внешним давлением относится не только к случаю равномерного давления. В известной мере им можно воспользоваться,

определяя критическую нагрузку при непрерывном, не обязательно постоянном давлении. Теперь мы хотим рассмотреть другие случаи, где условие непрерывности распределения нагрузки по поверхности оболочки существенно не выполняется. Среди этих случаев основными являются распределение нагрузки вдоль некоторой линии и нагружение, сосредоточенное в точке.

Вопрос о сосредоточенном нагружении строго выпуклой оболочки нами уже рассматривался в гл. 1 (п. 2 § 2), где показано, что такое нагружение не приводит к потере устойчивости. Таким образом, для полноты исследования вопроса нам остается рассмотреть случай нагружения, распределенного вдоль некоторой линии на поверхности оболочки. Нетрудно привести пример, где такое нагружение реализуется. Мы имеем в виду нагружение оболочки давлением туго натянутой на нее нити. Рассмотрим задачу о потере устойчивости и критической нагрузке в этой конкретной постановке.

Итак, пусть строго выпуклая оболочка, жестко закрепленная по краю, испытывает давление туго натянутой на нее нити (рис. 21, а). При некотором натяжении нити  $Q$  оболочка теряет устойчивость с образованием областей выпучивания вдоль линии прилегания нити (рис. 21, б). Определим величину этого критического натяжения.

В отличие от рассмотренного случая давления, распределенного по поверхности, где потеря устойчивости сопровождается выпучиванием сразу некоторой конечной области, в данном случае выпучивание распространяется с некоторого центра на линии прилегания нити к оболочке.

Представляется естественным приближать форму оболочки при закритической деформации с помощью простого зеркального выпучивания, как это делалось в гл. 1 (§ 2). При этом для энергии  $U$  упругой деформации оболочки получается выражение (стр. 49)

$$U = \pi c E (2h)^{3/2} \delta^{3/2} (k_1 + k_2).$$

Здесь  $2h$  — прогиб в центре выпучивания,  $k_1$  и  $k_2$  — главные кривизны оболочки,  $\delta$  — толщина,  $E$  — модуль упругости, а постоянная  $c \simeq 0,19$ .

Производимая натяжением нити  $Q$  работа равна

$$A = Q \Delta l,$$

где  $\Delta l$  — общее перемещение концевых точек оболочки.

Предполагая, что трение между нитью и оболочкой отсутствует, и, следовательно, нить прилегает к оболочке по некоторой дуге  $AB$  геодезической линии, без труда находим  $\Delta l$ . Оно равно разности между дугой  $AB$  и хордой, соединяющей ее концы. Если обозначить нормальную кривизну поперечного сечения оболочки в направлении нити через  $k_n$ , а прогиб в центре выпучивания через  $2h$ , то

$$\Delta l = \frac{1}{3} (2h)^{3/2} \sqrt{k_n}. \quad (*)$$



Действительно, если ввести декартовы координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , приняв соприкасающуюся плоскость нити в центре выпучивания за плоскость  $xy$ , а касательную за ось  $x$ , то нить, прилегая к поверхности по геодезической, будет задаваться уравнениями

$$y = \frac{k_n x^2}{2} + O(x^3), \quad z = O(x^3),$$

где через  $O(x^3)$  обозначены величины, имеющие порядок  $x^3$ .

Если хорда  $AB$  имеет длину  $2d$ , то длина дуги  $AB$  равна

$$s = \int_{-d}^d \sqrt{1 + k_n^2 x^2} dx \simeq 2d + \frac{k_n^2 d^3}{3}.$$

Или, замечая, что  $2h \simeq k_n d^2$ , получим

$$s = 2d + \frac{1}{3}(2h)^{3/2} \sqrt{k_n}.$$

Отсюда и получается указанное по формуле (\*) значение  $\Delta l$ .

Подставляя значение  $\Delta l$  в выражение работы  $A$ , получим

$$A = \frac{1}{3} Q (2h)^{3/2} \sqrt{k_n}.$$

Теперь из условия равновесия оболочки

$$d(U - A) = 0,$$

где варьируется прогиб  $2h$ , находим воспринимаемую оболочкой нагрузку  $Q$ . Имеем

$$d \left\{ \pi c E (2h)^{3/2} \delta^{3/2} (k_1 + k_2) - \frac{1}{3} Q (2h)^{3/2} \sqrt{k_n} \right\} = 0.$$

Отсюда

$$Q = 3\pi c E \delta^{3/2} (k_1 + k_2) \frac{1}{\sqrt{k_n}}.$$

Мы видим, что как и в рассмотренном случае непрерывного нагружения поверхности оболочки, натяжение  $Q$  стационарно по отношению к параметру  $2h$ , характеризующему выпучивание.

Итак, критическое натяжение  $Q_c$  нити, при котором оболочка может потерять устойчивость и начать

выпучиваться, определяет по формуле

$$Q_c = 3\pi c E \delta^{3/2} (k_1 + k_2) \frac{1}{\sqrt{k_n}}.$$

Для сферической оболочки радиуса  $R$  имеем

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{R},$$

и формула для величины критического натяжения принимает вид

$$Q_c = 6\pi c E \delta^2 \sqrt{\frac{\delta}{R}}.$$

Рассмотрим вопрос о потере устойчивости пологой конической оболочки вращения. Пусть пологая, жестко закрепленная по краю коническая оболочка под равномерным внешним давлением  $p$  теряет устойчивость, имея осевую симметрию выпучивания (рис. 22). Определим величину критической нагрузки.

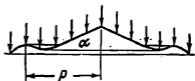


Рис. 22.

Пусть  $\rho$  — радиус круга выпучивания  $\gamma$ , а  $\alpha$  — угол между плоскостью основания и образующей. Тогда энергия деформации оболочки (при выпучивании) на единицу длины окружности  $\gamma$  будет (стр. 109)

$$\bar{U} = \frac{2E\delta^2\alpha^2 h}{\sqrt{12}(1-\nu^2)\rho},$$

где  $h$  — прогиб по области выпучивания. Полная энергия деформации оболочки будет равна

$$U = \frac{4\pi E\delta^2\alpha^2 h}{\sqrt{12}(1-\nu^2)}.$$

Производимая внешним давлением работа при выпучивании оболочки равна

$$A = \pi r^2 h p,$$

где  $p$  — критическое давление, под действием которого происходит выпучивание.

Из условия упругого равновесия оболочки при выпучивании

$$\frac{d}{dh}(U - A) = 0$$

получаем величину критического давления

$$p = \frac{2E\delta^2\alpha^2}{\sqrt{3}(1-\nu^2)r^2}.$$

Минимальное значение  $p$ , то есть верхняя критическая нагрузка, получается при максимальном  $\rho$ . В качестве такого значения  $\rho$  надо взять радиус основания оболочки  $r$ .

Итак, *верхняя критическая нагрузка для пологой жестко закрепленной по краю конической оболочки, находящейся под внешним давлением, равна*

$$p = \frac{2E\delta^2\alpha^2}{\sqrt{3}(1-\nu^2)r^2},$$

где  $\delta$  — толщина оболочки,  $r$  — радиус ее основания, а  $\alpha$  — угол между плоскостью основания и образующей.

Формула выведена в предположении об осесимметричности формы потери устойчивости.

В заключение рассмотрим вопрос о потере устойчивости и критической нагрузке для пологой оболочки вращения, находящейся под действием внешнего давления, равномерно распределенного вдоль некоторой параллели. При рассмотрении этого вопроса принцип В непосредственно применить нельзя. Причина состоит в следующем. Если действующая на оболочку нагрузка непрерывно распределена по поверхности, то энергия деформации локализована в окрестности границы выпучивания, в то время как нагрузка в основном находится вне этой окрестности. Именно на этом основании мы при определении энергии деформации просто минимизировали функционал  $U$ , игнорируя действующую на оболочку нагрузку в окрестности границы выпучивания. В рассматриваемой теперь задаче нагрузка, как и энергия деформации, сосредоточена в окрестности границы выпучивания. Поэтому, варьируя форму оболочки в указанной окрестности, нельзя игнорировать производимую внешней нагрузкой работу.

Пусть для определенности действующее на оболочку усилие  $Q$  передается через жесткое кольцо, прилегающее к обо-

лочке по параллели радиуса  $\rho$ . При этом естественно предположить, что деформация оболочки в момент потери устойчивости обладает осевой симметрией. Выражение энергии деформации в нормированных переменных  $u$ ,  $v$ , задающих деформацию, имеет вид

$$U = \frac{\pi E \delta^{3/2} \alpha^{3/2} \rho^{3/2}}{12^{3/4} (1 - \nu^2)} \int_{-\infty}^{\infty} (v'^2 + u^2) ds.$$

Производимая давлением кольца работа при выпучивании оболочки равна

$$A = \frac{Q}{12^{1/4}} \sqrt{\delta \rho^3 \alpha} \int_{-\infty}^{s^*} v ds.$$

В этих формулах  $\rho^*$  — радиус круга выпучивания, а  $s^*$  — значение безразмерного параметра  $s$ , отвечающее радиусу кольца.

Из наглядных соображений естественно считать, что  $\rho^* = \rho$ . Что касается величины  $s^*$ , то о ней можно сказать следующее. Очевидно, прогиб будет максимальным вдоль параллели, где прилегает кольцо. Поэтому  $s^*$  соответствует максимуму интеграла, определяющего прогиб. Таким образом, можно считать, что

$$\int_{-\infty}^{s^*} v ds = \max_{(s)} \int_{-\infty}^s v ds.$$

Определение состояния упругого равновесия при заметном выпучивании сводится к задаче на экстремум функционала

$$W = U - A,$$

где варьируемые функции  $u$ ,  $v$  связаны соотношением

$$u' + v + \frac{v^2}{2} = 0 \quad (**)$$

и удовлетворяют краевым условиям

$$u(\infty) = u(-\infty) = 0, \quad v(\infty) = v(-\infty) = 0.$$

Эта вариационная задача решается численно следующим способом. Исходя из наглядного представления о характере рассматриваемых деформаций, считаем функцию  $v(s)$  в окрест-

ности параллели, где происходит нагружение, функцией вида

$$v(s) = \lambda(\sigma - |s|), \quad |s| \leq \sigma,$$

где  $\lambda$  и  $\sigma$  — некоторые параметры. При этом функция  $u(s)$  в том же интервале  $|s| \leq \sigma$  определяется связью (\*\*). Вне этого интервала, то есть при  $|s| \geq \sigma$ , функции  $u$ ,  $v$  определяются из условия стационарности функционала  $U$  и условия гладкости сопряжения со значениями внутри интервала.

Если указанным способом найти функции  $u(s)$ ,  $v(s)$  и подставить их в выражения функционалов  $U$  и  $A$ , то последние станут определенными функциями параметров  $\lambda$  и  $\sigma$ . Теперь, фиксируя значение функции  $A$ , то есть значение интеграла

$$K = \int_{-\infty}^{s^*} v ds,$$

будем искать минимум функции  $U$  или, что то же самое, минимум интеграла

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} (v'^2 + u^2) ds.$$

Обозначим этот минимум  $J(K)$ . Теперь наша вариационная задача сводится к задаче на экстремум функции

$$W = \frac{\pi E \delta^{1/2} \alpha^{3/2} \rho^{1/2}}{12^{3/4} (1 - \nu^2)} J(K) - \frac{Q}{12^{1/4}} \sqrt{\delta \rho \alpha} K.$$

Из условия стационарности этой функции находим воспринимаемую оболочкой нагрузку  $Q$  при выпучивании:

$$Q = \frac{\pi E \delta^2 \alpha^2}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)} \frac{dJ}{dK}.$$

Верхнее критическое давление отвечает максимуму  $dJ/dK$ . Численный расчет по описанной схеме дает для этой величины  $dJ/dK$  значение,  $\approx 3$ .

Следовательно, критическое усилие  $Q_c$ , действующее на пологую оболочку вращения через жесткое кольцо, определяется по формуле

$$Q_c = \frac{3\pi E \delta^2 \alpha^2}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)}.$$

Напомним, что здесь  $\rho$  — радиус параллели, по которой прилегает кольцо к оболочке,  $\alpha$  — угол между плоскостью параллели и касательными плоскостями поверхности,  $\delta$  — толщина оболочки, а  $E$  и  $\nu$  — упругие постоянные материала. Для сферической оболочки радиуса  $R$   $\alpha \approx \rho/R$  и, следовательно,

$$Q_c = \frac{3\pi E \delta^2 \rho^2}{\sqrt{12} (1 - \nu^2) R^2}.$$

Формула для критического усилия  $Q_c$  в случае сферической оболочки была подвергнута экспериментальной проверке. Испытуемая сферическая оболочка 1 свободно опиралась на жесткое кольцо 2 (рис. 23). Действие груза  $Q$  через вертикальный стержень 3 передавалось на колпачок 4, который опирался на оболочку вдоль параллели диаметра  $d = 2\rho$ .

Эксперимент заключался в том, что груз  $Q$ , состоящий из стальных шайб 5, постепенно увеличивался до момента потери устойчивости оболочки, которая сопровождалась отчетливым щелчком и резким опусканием стержня 3. Значение  $Q$ , отвечающее моменту потери устойчивости оболочки, принималось за верхнее критическое значение.

Для одной и той же оболочки опыт проводился четыре раза с четырьмя различными колпачками 4, диаметром  $d = 8, 10, 12$  и  $14$  мм. Так же как и в предыдущих экспериментах, образцы сферических оболочек получались из меди путем напыления в вакууме на стальную форму.

На рис. 24 представлены графики зависимости верхней критической нагрузки  $Q_c$  от диаметра  $d = 2\rho$  параллели, вдоль которой распределяется давление: Три кривые отвечают трем различным оболочкам с одним и тем же радиусом кривизны  $R = 150$  мм, но различными толщинами  $\delta = 0,047, \delta = 0,055, \delta = 0,072$  мм.

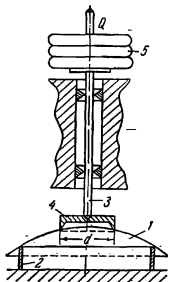
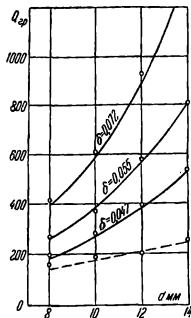


Рис. 23.

Отдельные точки, изображенные кружочками, дают экспериментальные значения верхней критической нагрузки  $Q_{кр}$ , отвечающей четырем различным значениям  $d = 8, 10, 12$  и  $14$  мм. Как видим, экспериментальные значения практически не отличаются от теоретических.



**6. Потеря устойчивости трехслойных оболочек.** Полученные нами результаты об устойчивости пологих строго выпуклых оболочек при различных способах нагружения могут быть перенесены на случай так называемых трехслойных оболочек. Трехслойная оболочка состоит из тонких наружных слоев, изготовленных из материала с высокими механическими характеристиками, и сравнительно толстого слоя заполнителя, изготовленного из слабого материала. Так же как и для обычных оболочек, при выпучивании трехслойной оболочки энергия ее деформации сосредото-

чена в основном на границе области выпучивания и она состоит из энергии деформации наружных слоев и энергии деформации заполнителя.

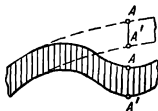
Обозначая через  $u$  и  $v$  смещения (при деформации) точек поверхности оболочки в касательной плоскости и по нормали соответственно, мы получили для энергии деформации наружных слоев на единицу длины  $\gamma$  границы выпучивания следующее выражение:

$$\bar{U}_e = \frac{\delta E}{1 - \nu^2} \int_{-e^*}^{e^*} \left( \frac{\delta^2 v'^2}{12} + \frac{u^2}{\rho^2} \right) ds.$$

Здесь  $\delta$  — толщина наружных слоев,  $\rho$  — радиус кривизны  $\gamma$ ,  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Интегрирование выполняется по окрестности условной границы выпучивания  $\gamma$ .

Для того чтобы получить энергию деформации среднего слоя (заполнителя), мы предположим, что наружные слои деформируются одинаково (рис. 25). При этом в среднем слое получаются деформации сдвига, определяемые производной функции  $v$ , и энергия деформации на единицу объема заполнителя будет равна

$$\frac{Gv'^2}{2},$$



где  $G$  — модуль сдвига заполнителя. Соответственно энергия деформации заполнителя на единицу длины границы выпучивания будет

$$\bar{U}_l = \frac{Gt}{2} \int_{-\varepsilon^*}^{\varepsilon^*} v'^2 ds,$$

где  $t$  — толщина заполнителя.

Итак, полная энергия деформации на единицу длины  $\gamma$  трехслойной оболочки равна

$$\bar{U}_e + \bar{U}_l = \frac{\delta E}{1-\nu^2} \int_{-\varepsilon^*}^{\varepsilon^*} \left( \frac{\delta^2 v'^2}{12} + \frac{u^2}{\rho^2} \right) ds + \frac{Gt}{2} \int_{-\varepsilon^*}^{\varepsilon^*} v'^2 ds.$$

Далее, как и для обычных оболочек в § 1, мы нормируем переменные  $u$ ,  $v$ ,  $s$ , полагая

$$\bar{u} = \frac{u}{\varepsilon \rho \alpha^2}, \quad \bar{v} = \frac{v'}{\alpha}, \quad \bar{s} = \frac{s}{\rho \varepsilon},$$

где  $\alpha$  — угол между соприкасающейся плоскостью кривой  $\gamma$  и касательными плоскостями поверхности, а

$$\varepsilon^4 = \frac{\delta^2}{12\rho^2\alpha^2}.$$

При этом для энергии деформации получается выражен

$$\bar{U}_e + \bar{U}_l = \frac{E\delta^{3/2}\alpha^{3/2}\rho^{-1/2}}{12^{3/2}(1-\nu^2)} \int_{-\varepsilon^*}^{\varepsilon^*} (\bar{v}^2 + \bar{u}^2) d\bar{s} + \frac{Gt\alpha^2\rho\varepsilon}{2} \int_{-\varepsilon^*}^{\varepsilon^*} \bar{v}^2 d\bar{s},$$



Ограничиваясь случаем таких оболочек и их деформаций, когда параметр  $\delta/\rho\alpha$  мал, заменим пределы интегрирования на  $\pm \infty$ . Тогда получим

$$\bar{U}_e + \bar{U}_i = \frac{E\delta^{3/2}\alpha^{3/2}\rho^{-1/2}}{12^{3/4}(1-\nu^2)} \int_{-\infty}^{\infty} (v'^2 + u^2) ds + \frac{Gt\alpha^2\rho e}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 ds.$$

Черта над обозначениями переменных  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{s}$  для простоты записи здесь и в дальнейшем опускается.

Форму оболочки при выпучивании в зоне сильного местного изгиба мы определим из условия минимума энергии при заданной общей деформации

$$h = -\frac{1}{2 \cdot 12^{1/4}} \sqrt{\delta\rho\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 ds$$

(см. § 1). Таким образом, задача сводится к тому, чтобы минимизировать функционал

$$\bar{U}_e + \bar{U}_i$$

при условии

$$h = \text{const.}$$

Имеем

$$\frac{Gt\alpha^2\rho e}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 ds = tGah.$$

Следовательно, функционал  $U$  для трехслойной оболочки отличается от соответствующего функционала для обычной оболочки слагаемым, не зависящим от варьируемых функций  $u$ ,  $v$ . Это значит, что рассматриваемый теперь функционал получает стационарное значение при тех же  $u$ ,  $v$ , что и в соответствующей задаче из § 1.

Используя полученный в § 1 результат, находим для энергии деформации трехслойной оболочки выражение

$$\bar{U}_e + \bar{U}_i = \frac{2E\delta^2\alpha^2 h}{\sqrt{12}(1-\nu^2)\rho} + tGah.$$

Для того чтобы получить полную энергию деформации оболочки, это выражение надо проинтегрировать по дуге кривой  $\gamma$ , ограничивающей область выпучивания.

Интегрирование первого слагаемого в выражении  $\bar{U}_e + \bar{U}_l$  выполнено в § 1 гл. 1. Если воспользоваться полученным там результатом, то получим

$$\int_{\gamma} \bar{U}_e ds_{\gamma} = 2 \frac{4\pi E \delta^2 h \lambda^2}{\sqrt{12} (1 - \nu^2) \sqrt{R_1 R_2}},$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — главные радиусы кривизны в центре выпучивания.

Найдем теперь

$$\int_{\gamma} \bar{U}_l ds_{\gamma}.$$

Имеем (§ 1 гл. 1)

$$\alpha = \rho k_n,$$

где  $k_n$  — нормальная кривизна поверхности оболочки в направлении  $\gamma$ . Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{\lambda (R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}, \\ k_n &= \frac{1}{R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi}, \\ ds_{\gamma} &= \lambda (R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi)^{1/2} d\varphi, \\ \alpha ds_{\gamma} &= \frac{\lambda^2 (R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi)}{\sqrt{R_1 R_2}} d\varphi. \end{aligned}$$

то отсюда имеем

$$\int_{\gamma} \bar{U}_l ds_{\gamma} = Ght \int_{\gamma} \alpha ds_{\gamma} = \frac{\pi Gt (R_1 + R_2)}{\sqrt{R_1 R_2}} h \lambda^2.$$

Итак, полная энергия деформации оболочки равна

$$U = \frac{8\pi E \delta^2 h \lambda^2}{\sqrt{12} (1 - \nu^2) \sqrt{R_1 R_2}} + \frac{\pi Gt (R_1 + R_2)}{\sqrt{R_1 R_2}} h \lambda^2.$$

Производимая внешним давлением  $p$  работа

$$A = \pi p \sqrt{R_1 R_2} h \lambda^2.$$

Теперь из условия равновесия оболочек

$$d(U - A) = 0,$$

## ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК

где варьируется параметр  $h\lambda^2$ , находим величину воспринимаемого оболочкой давления при выпучивании, то есть *критическое давление*

$$p = \frac{4E\delta^2}{\sqrt{3}(1-\nu^2)R_1R_2} + \frac{Gt(R_1+R_2)}{R_1R_2}.$$

Напомним, что здесь  $R_1$  и  $R_2$  — главные радиусы кривизны оболочки,  $\delta$  — толщина наружных слоев,  $t$  — толщина слоя заполнителя,  $E$  и  $\nu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона для наружных слоев,  $G$  — модуль сдвига для заполнителя.

Формулу для  $p$  можно представить еще в таком виде:

$$p = \frac{4E\delta^2K}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} + 2GtH,$$

где  $K$  — гауссова, а  $H$  — средняя кривизна оболочки в центре выпучивания.

### § 2. Специальные бесконечно малые изгибания строго выпуклой поверхности

Применение принципа В для исследования потери устойчивости оболочек и определения критических нагрузок предполагает построение бесконечно малых изгибаний поверхности оболочки с разрывом непрерывности на границе предполагаемой области выпучивания. В общем случае для произвольной поверхности и произвольной границы выпучивания эта задача представляется довольно трудной. Однако в ряде практически важных задач области выпучивания малы и имеют форму, близкую к эллипсу. В этих случаях для оболочек с достаточной регулярностью поверхности задача о построении указанного бесконечно малого изгибания может быть решена в замкнутом виде. Это решение будет дано в настоящем параграфе.

Напомним постановку задачи. Пусть  $F$  — регулярная строго выпуклая поверхность и  $G$  — малая эллиптическая область на ней с центром  $P$ . Требуется построить поле бесконечно малого изгибания  $\tau$ , регулярное всюду, кроме границы  $\gamma$  области  $G$ , где оно разрывно, причем этот разрыв удовлетворяет следующему условию сопряжения:

$$\Delta\tau = \sigma\epsilon,$$

где  $e$  — единичный вектор бинормали кривой  $\gamma$ , а  $\sigma$  — некоторая функция, заданная вдоль  $\gamma$ . В связи с конкретными приложениями мы еще будем предполагать, что поле  $\tau$  исчезает (стремится к нулю) при удалении от области выпучивания.

**1. Общее представление для изгибающих полей.** Пусть  $P$  — центр области продавливания  $G$ . Поскольку существенные деформации поверхности  $F$  ограничиваются малой окрестностью точки  $P$ , естественно ввести прямоугольные декартовы координаты  $x, y, z$ , приняв касательную плоскость в точке  $P$  за плоскость  $xu$ , нормаль поверхности за ось  $z$ , а саму точку  $P$  за начало координат. При этом, если за направление осей  $x, y$  принять главные направления в точке  $P$ , то поверхность  $F$  вблизи этой точки можно задать уравнением

$$z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2),$$

где  $a$  и  $b$  — главные кривизны поверхности в точке  $P$ . В простейшем случае, когда область  $G$  соосна с индикатрисой кривизны в точке  $P$ , она задается неравенством

$$Ax^2 + By^2 \leq 1.$$

Введем на поверхности координаты  $u, v$ , полагая

$$u = x\sqrt{a}, \quad v = y\sqrt{b}$$

В этих координатах наша поверхность задается уравнениями

$$x = \frac{u}{\sqrt{a}}, \quad y = \frac{v}{\sqrt{b}}, \quad z = \frac{1}{2}(u^2 + v^2).$$

Пусть  $\xi, \eta, \zeta$  — составляющие изгибающего поля по осям  $x, y, z$  соответственно. Из уравнения бесконечно малых изгибаний

$$dr d\tau = 0,$$

где  $r$  — вектор точки поверхности, а  $\tau$  — вектор изгибающего поля, получается следующая система для функций  $\xi, \eta, \zeta$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a}} \xi_u + u \zeta_u &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{b}} \eta_v + v \zeta_v &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{b}} \eta_u + \frac{1}{\sqrt{a}} \xi_v + u \zeta_v + v \zeta_u &= 0, \end{aligned}$$

Если из этой системы исключить функции  $\xi$  и  $\eta$ , то для  $\zeta$  получается уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} = 0.$$

Полагая

$$w = u + iv,$$

можем представить общее выражение для составляющей  $\zeta$  с помощью аналитической функции комплексного переменного  $w$

$$\zeta = \operatorname{Re} \zeta(w).$$

Что касается двух других составляющих изгибающего поля  $\xi$  и  $\eta$ , то они через функцию  $\zeta(w)$  выражаются по формулам

$$\xi = \sqrt{a} \operatorname{Re} \left( -u \zeta(w) + \int \zeta(w) dw \right),$$

$$\eta = \sqrt{b} \operatorname{Re} \left( -v \zeta(w) - i \int \zeta(w) dw \right).$$

Найденное представление для изгибающих полей в равной степени относится и к общему случаю. Однако, имея в виду решение задачи о сопряжении, представляется целесообразным выражению для изгибающего поля в общем случае придать несколько другую форму.

Область продавливания  $G$  в общем случае задается неравенством

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \leq 1.$$

Введем новые переменные  $u$ ,  $v$  согласно формулам

$$x = \lambda_{11}u + \lambda_{12}v,$$

$$y = \lambda_{21}u + \lambda_{22}v.$$

Коэффициенты  $\lambda_{ij}$  этих формул подберем так, чтобы в координатах  $u$ ,  $v$  поверхность задавалась уравнением

$$z = \frac{1}{2} (u^2 + v^2),$$

а область продавливания  $G$  неравенством

$$Au^2 + Bv^2 \leq 1.$$

Возможность подобрать коэффициенты  $\lambda_{ij}$  таким образом гарантируется положительной определенностью квадратичных форм

$$\frac{1}{2}(ax^2 + by^2), \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

которые указанным преобразованием приводятся одновременно к каноническому виду.

Введем, кроме того, переменные  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  согласно равенствам

$$\tilde{x} = x\sqrt{a}, \quad \tilde{y} = y\sqrt{b}.$$

Это преобразование также приводит форму  $z$  к сумме квадратов

$$z = \frac{1}{2}(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2).$$

Очевидно, преобразование переменных  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  в  $u$ ,  $v$  является ортогональным и задается формулами

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= u \cos \vartheta - v \sin \vartheta, \\ \tilde{y} &= u \sin \vartheta + v \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Следовательно, связь между переменными  $x$ ,  $y$  и  $u$ ,  $v$  устанавливается формулами вида

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{a}}(u \cos \vartheta - v \sin \vartheta), \\ y &= \frac{1}{\sqrt{b}}(u \sin \vartheta + v \cos \vartheta). \end{aligned}$$

Угол  $\vartheta$  находится из того условия, что наше преобразование переводит форму

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \quad \text{в} \quad Au^2 + Bv^2.$$

Величины  $A$  и  $B$  являются собственными значениями формы

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

относительно формы

$$ax^2 + by^2,$$

и, следовательно, являются корнями характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda a & a_{12} \\ a_{22} - \lambda b & \end{vmatrix} = 0.$$

Как показано выше, в переменных  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$  изгибающее поле задается равенствами

$$\begin{aligned} \zeta &= \operatorname{Re} \tilde{\zeta}(\tilde{z}), \\ \xi &= \sqrt{a} \operatorname{Re} \left( -\tilde{x}\tilde{\zeta} + \int \tilde{\zeta} d\tilde{z} \right), \\ \eta &= \sqrt{b} \operatorname{Re} \left( -\tilde{y}\tilde{\zeta} - i \int \tilde{\zeta} d\tilde{z} \right), \end{aligned}$$

где  $\tilde{\zeta}(\tilde{z})$  — аналитическая функция комплексного переменного  $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$ .

Перейдем в этих формулах к переменным  $u$ ,  $v$ . Замечая, что

$$\tilde{z} = we^{i\vartheta}, \quad w = u + i$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \zeta &= \operatorname{Re} \zeta(w), \\ \xi &= \sqrt{a} \operatorname{Re} \left\{ -(u \cos \vartheta - v \sin \vartheta) \zeta + e^{i\vartheta} \int \zeta dw \right\}, \\ \eta &= \sqrt{b} \operatorname{Re} \left\{ -(u \sin \vartheta + v \cos \vartheta) \zeta - ie^{i\vartheta} \int \zeta dw \right\}, \end{aligned}$$

где  $\zeta(w) = \tilde{\zeta}(we^{i\vartheta})$  — аналитическая функ комплексного переменного  $w$ .

Таково представление для изгибающих полей поверхности в общем случае.

2. Сопряжение изгибающих полей  $\tau$  и  $\tau'$  в простейшем случае. В п. 1 (стр. 134) мы нашли общее представление для изгибающих полей с помощью аналитической функции комплексного переменного  $w = u + iv$ . Именно,

$$\begin{aligned} \zeta &= \operatorname{Re} \zeta(w), \\ \xi &= \sqrt{a} \operatorname{Re} \left( -u\zeta(w) + \int \zeta(w) dw \right), \\ \eta &= \sqrt{b} \operatorname{Re} \left( -v\zeta(w) - i \int \zeta(w) dw \right). \end{aligned}$$

Изгибающему полю  $\tau'$  соответствует аналитическая функция  $\zeta'(\omega)$  внутри области  $G$ , то есть внутри эллипса

$$\frac{A}{a} u^2 + \frac{B}{b} v^2 = 1,$$

а изгибающему полю  $\tau$  соответствует аналитическая функция  $\zeta(\omega)$  вне указанного эллипса.

Интересующая нас разность изгибающих полей на кривой  $\gamma$ , то есть при

$$\frac{A}{a} u^2 + \frac{B}{b} v^2 = 1,$$

задается системой формул:

$$\Delta\zeta = \operatorname{Re} \Delta\zeta(\omega),$$

$$\Delta\xi = \sqrt{a} \operatorname{Re} \left( -u \Delta\zeta + \int \dot{\Delta\zeta}(\omega) d\omega \right),$$

$$\Delta\eta = \sqrt{b} \operatorname{Re} \left( -v \Delta\zeta - i \int \dot{\Delta\zeta}(\omega) d\omega \right),$$

где  $\Delta\zeta(\omega)$  — обозначает разность аналитических функций  $\zeta(\omega)$  и  $\zeta'(\omega)$  на эллипсе

$$\frac{A}{a} u^2 + \frac{B}{b} v^2 = 1.$$

Перейдем от комплексного переменного  $\omega$  к переменному  $\omega$ , полагая

$$\omega = \lambda\omega + \frac{\mu}{\omega}.$$

Подберем постоянные  $\lambda$  и  $\mu$  таким образом, чтобы окружности  $|\omega|=1$  из плоскости комплексного переменного  $\omega$  соответствовал эллипс

$$\frac{A}{a} u^2 + \frac{B}{b} v^2 = 1$$

на плоскости  $\omega$ . Очевидно, для этого достаточно подчинить величины  $\lambda$ ,  $\mu$  условиям

$$\lambda + \mu = \sqrt{\frac{a}{A}}, \quad \lambda - \mu = \sqrt{\frac{b}{B}}.$$

На границе области  $G$ , то есть на элл

$$\frac{A}{a} u^2 + \frac{B}{b} v^2 = 1,$$



ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК

$\omega = e^{i\varphi}$  и, следовательно,

$$u = (\lambda + \mu) \cos \varphi, \quad v = (\lambda - \mu) \sin \varphi.$$

Перейдем в формулах, задающих  $\Delta\tau = \tau - \tau'$ , от переменного  $\omega$  к  $\omega = e^{i\varphi}$ , полагая

$$\Delta\zeta(\omega) = P(\varphi) + iQ(\varphi).$$

Тогда будем иметь

$$\Delta\zeta = P,$$

$$\Delta\xi = -\sqrt{a} \left\{ (\lambda + \mu) P \cos \varphi + \int ((\lambda + \mu) P \sin \varphi + (\lambda - \mu) Q \cos \varphi) d\varphi \right\},$$

$$\Delta\eta = \sqrt{b} \left\{ -(\lambda - \mu) P \sin \varphi + \int ((\lambda - \mu) P \cos \varphi - (\lambda + \mu) Q \sin \varphi) d\varphi \right\}.$$

Составим уравнение кривой  $\gamma$  — границы области  $G$  на поверхности, приняв в качестве параметра на этой кривой угол  $\varphi = \arg \omega$ . Имеем

$$x = \frac{u}{\sqrt{a}} = \frac{\lambda + \mu}{\sqrt{a}} \cos \varphi,$$

$$y = \frac{v}{\sqrt{b}} = \frac{\lambda - \mu}{\sqrt{b}} \sin \varphi,$$

$$z = \frac{u^2 + v^2}{2} = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2} + \lambda\mu \cos 2\varphi.$$

Таким образом, наша кривая задается уравнениями

$$x = \frac{\lambda + \mu}{\sqrt{a}} \cos \varphi, \quad y = \frac{\lambda - \mu}{\sqrt{b}} \sin \varphi,$$

$$z = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2} + \lambda\mu \cos 2\varphi.$$

Найдем вектор бинормали кривой  $\gamma$ . Его компоненты по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  являются минорами матрицы

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix}.$$

Положим

$$a_1 = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}, \quad a_2 = \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}, \quad a_3 = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}.$$

Опуская соответствующие выкладки, приведем окончательное выражение для величин  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ :

$$a_1 = -\frac{4}{\sqrt{b}} (\lambda - \mu) \lambda \mu \cos^3 \varphi,$$

$$a_2 = \frac{4}{\sqrt{a}} (\lambda + \mu) \lambda \mu \sin^3 \varphi,$$

$$a_3 = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\sqrt{ab}}.$$

Условие сопряжения изгибающих полей можно записать в виде

$$\Delta \xi = \sigma a_1,$$

$$\Delta \eta = \sigma a_2,$$

$$\Delta \zeta = \sigma a_3,$$

включив множитель, нормирующий вектор бинормали, в  $\sigma$ .

Продифференцируем эти условия сопряжения по  $\varphi$  и подставим в них найденные выше выражения для  $\Delta \xi$ ,  $\Delta \eta$ ,  $\Delta \zeta$ . Имеем:

$$(\Delta \zeta)' = P',$$

$$(\Delta \xi)' = -\sqrt{a} \{(\lambda + \mu) P' \cos \varphi + Q (\lambda - \mu) \cos \varphi\},$$

$$(\Delta \eta)' = -\sqrt{b} \{(\lambda - \mu) P' \sin \varphi + Q (\lambda + \mu) \sin \varphi\}.$$

Условия сопряжения принимают вид

$$(\lambda + \mu) P' \cos \varphi + Q (\lambda - \mu) \cos \varphi = \frac{4}{\sqrt{ab}} (\lambda - \mu) \lambda \mu (\sigma \cos^3 \varphi)',$$

$$(\lambda - \mu) P' \sin \varphi + Q (\lambda + \mu) \sin \varphi = -\frac{4}{\sqrt{ab}} (\lambda + \mu) \lambda \mu (\sigma \sin^3 \varphi)',$$

$$P' = \frac{1}{\sqrt{ab}} (\lambda^2 - \mu^2) \sigma'.$$

Включая множитель  $1/\sqrt{ab}$  в  $\sigma$ , получим

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) P' \cos \varphi + Q (\lambda - \mu) \cos \varphi &= 4 (\lambda - \mu) \lambda \mu (\sigma \cos^3 \varphi)', \\ (\lambda - \mu) P' \sin \varphi + Q (\lambda + \mu) \sin \varphi &= -4 (\lambda + \mu) \lambda \mu (\sigma \sin^3 \varphi)', \\ P' &= (\lambda^2 - \mu^2) \sigma'.\end{aligned}$$

На первый взгляд в этих условиях можно усмотреть некоторую некорректность нашей первоначальной задачи об изгибании, так как функция  $\sigma$ , ввиду произвола кривой  $\gamma$ , по существу является произвольной функцией, и для двух функций  $P$  и  $Q$  получаются три уравнения. Однако, как легко видеть, третье уравнение является следствием первых двух. Таким образом, мы имеем в сущности два уравнения для двух функций  $P$  и  $Q$ , из которых они и определяются.

В интересующем нас приложении, где для области продавливания  $G$  принимается в известном смысле простейшая форма — эллипс, представляется целесообразным взять в качестве  $\sigma$  простейшую функцию, каковой является постоянная \*). Все дальнейшее рассмотрение будет вестись для этого случая.

Итак, пусть

$$\sigma = \text{const.}$$

Тогда

$$P = (\lambda^2 - \mu^2) \sigma, \quad Q = -6\lambda\mu\sigma \sin 2\varphi.$$

Следовательно, для аналитических функций  $\zeta$  и  $\zeta'$ , задающих наши изгибающие поля, на кривой  $\gamma$  выполняется условие

$$\zeta - \zeta' = (\lambda^2 - \mu^2) \sigma - i6\lambda\mu\sigma \sin 2\varphi. \quad (*)$$

Найдем теперь сами аналитические функции  $\zeta$  и  $\zeta'$ . При этом от функции  $\zeta$  мы потребуем, чтобы определяемое ею изгибающее поле  $\tau$  вне области  $G$  исчезало на бесконечности. Это условие диктуется последующими приложениями. Оно будет выполнено, если потребовать, чтобы на бесконечности функция  $\zeta$  убывала как  $1/\omega^2$ .

Условие (\*) определяет известную задачу Римана, которая в нашем случае имеет единственное решение. Найдем это

\*) Есть основания ожидать, что оба наши предположения — что малая область выпучивания имеет форму эллипса и что функция  $\sigma = \text{const}$  — вытекают из решения общей вариационной задачи, к которой сводится проблема. Однако для этого потребовалось бы более глубокое исследование вопроса.

решение. Положим

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega^2}, \quad \zeta' = \beta \omega^2 + c,$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $c$  — некоторые постоянные.

На границе области  $G$ , то есть при  $|\omega| = 1$ , будет

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega^2} = \alpha (\cos 2\varphi - i \sin 2\varphi),$$

$$\begin{aligned} \zeta' &= \beta \left( \lambda \omega + \frac{\mu}{\omega} \right)^2 + c = \\ &= \beta [(\lambda^2 + \mu^2) \cos 2\varphi + i(\lambda^2 - \mu^2) \sin 2\varphi + 2\lambda\mu] + c. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \zeta - \zeta' &= [\alpha - \beta(\lambda^2 + \mu^2)] \cos 2\varphi - \\ &\quad - i[\alpha + \beta(\lambda^2 - \mu^2)] \sin 2\varphi - 2\lambda\mu\beta - c. \end{aligned}$$

Принимая теперь во внимание условие (\*), получаем для постоянных  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c$  следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha - \beta(\lambda^2 + \mu^2) &= 0, \\ \alpha + \beta(\lambda^2 - \mu^2) &= 6\lambda\mu\sigma, \\ -2\lambda\mu\beta - c &= (\lambda^2 - \mu^2)\sigma. \end{aligned}$$

Из этой системы находим

$$\beta = \frac{3\mu\sigma}{\lambda}, \quad \alpha = \frac{3\mu\sigma}{\lambda}(\lambda^2 + \mu^2).$$

Определив функции  $\zeta$  и  $\zeta'$ , мы нашли тем самым изгибающие поля  $\tau$ ,  $\tau'$  и решили задачу об изгибании поверхности  $F$ , поставленную в п. 1. Если исходная поверхность задается вектор-функцией  $r$ , то изометрически преобразованная поверхность задается вектор-функцией  $r + \tau'$  внутри области продавливания и вектор-функцией  $r + \tau$  вне этой области. Вектор-функции  $\tau$  и  $\tau'$  определяются с помощью аналитических функций  $\zeta$  и  $\zeta'$  по формулам, полученным в этом п. 2.

**3. Сопряжение изгибающих полей в общем случае.** Так же как и в рассмотренном простейшем случае, изгибающие поля  $\tau$  и  $\tau'$  на границе  $\gamma$  области продавливания

удовлетворяют условию сопряжения

$$\tau - \tau' = \sigma e,$$

где  $e$  — вектор бинормали кривой  $\gamma$ , а  $\sigma$  — некоторая функция, заданная на этой кривой.

Для изгибающих полей  $\tau$  и  $\tau'$  имеет место представление с помощью соответствующих аналитических функций  $\zeta(w)$ :

$$\zeta = \operatorname{Re} \zeta(w),$$

$$\xi = \sqrt{a} \operatorname{Re} \left\{ -(u \cos \vartheta - v \sin \vartheta) \zeta(w) + e^{i\vartheta} \int \zeta(w) dw \right\},$$

$$\eta = \sqrt{b} \operatorname{Re} \left\{ -(u \sin \vartheta + v \cos \vartheta) \zeta(w) - te^{i\vartheta} \int \zeta(w) dw \right\}.$$

Для поля  $\tau$  функция  $\zeta(w)$  является аналитической в области

$$Au^2 + Bv^2 \geq 1,$$

а для поля  $\tau'$  соответствующая функция  $\zeta'(w)$  является аналитической в области

$$Au^2 + Bv^2 \leq 1.$$

Граница этих областей есть эллипс, задаваемый уравнением

$$Au^2 + Bv^2 = 1.$$

Разность изгибающих полей  $\tau - \tau'$  вдоль кривой  $\gamma$  задается системой формул

$$\Delta \zeta = \operatorname{Re} \Delta \zeta(w),$$

$$\Delta \xi = \sqrt{a} \operatorname{Re} \left\{ -(u \cos \vartheta - v \sin \vartheta) \Delta \zeta + e^{i\vartheta} \int \Delta \zeta(w) dw \right\},$$

$$\Delta \eta = \sqrt{b} \operatorname{Re} \left\{ -(u \sin \vartheta + v \cos \vartheta) \Delta \zeta - te^{i\vartheta} \int \Delta \zeta(w) dw \right\},$$

где  $\Delta \zeta(w)$  есть разность аналитических функций  $\zeta(w)$  и  $\zeta'(w)$  на эллипсе

$$Au^2 + Bv^2 = 1.$$

Так же как и в простейшем случае, вводим комплексное переменное  $\omega$ , полагая

$$\omega = \lambda \omega + \frac{\mu}{\omega},$$

и постоянные  $\lambda, \mu$  определяем из того условия, чтобы единичной окружности  $|\omega| = 1$  на плоскости  $w$  соответствовал эллипс

$$Au^2 + Bv^2 = 1.$$

Для этого надо потребовать, чтобы

$$\lambda + \mu = \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad \lambda - \mu = \frac{1}{\sqrt{B}}.$$

На границе области  $G$ , то есть на кривой  $\gamma$ ,

$$\omega = e^{i\varphi}$$

ательно,

$$u = (\lambda + \mu) \cos \varphi, \quad v = (\lambda - \mu) \sin \varphi.$$

Перейдем в формулах, задающих разность изгибающих полей  $\Delta\tau$  вдоль кривой  $\gamma$ , от переменного  $w$  к  $\omega = e^{i\varphi}$ . Полагая, как и в простейшем случае, на  $\gamma$

$$\Delta\zeta(w) = P(\varphi) + iQ(\varphi),$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} \Delta\xi &= \sqrt{a} \operatorname{Re} \left\{ -(\lambda \cos(\varphi + \vartheta) + \mu \cos(\vartheta - \varphi))(P + iQ) + \right. \\ &\quad \left. + ie^{i\vartheta} \int (P + iQ)(\lambda e^{i\varphi} - \mu e^{-i\varphi}) d\varphi \right\} = \\ &= \sqrt{a} \left\{ -(\lambda \cos(\varphi + \vartheta) + \mu \cos(\vartheta - \varphi))P - \right. \\ &\quad \left. - \int (\lambda \sin(\varphi + \vartheta) - \mu \sin(\vartheta - \varphi))P d\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \int (\lambda \cos(\varphi + \vartheta) - \mu \cos(\vartheta - \varphi))Q d\varphi \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi}(\Delta\xi) &= -\sqrt{a} \{ (\lambda \cos(\varphi + \vartheta) + \mu \cos(\vartheta - \varphi))P' + \\ &\quad + (\lambda \cos(\varphi + \vartheta) - \mu \cos(\vartheta - \varphi))Q \}. \end{aligned}$$

Аналогично получается

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi}(\Delta\eta) &= -\sqrt{b} \{ (\lambda \sin(\vartheta + \varphi) + \mu \sin(\vartheta - \varphi))P' + \\ &\quad + (\lambda \sin(\varphi + \vartheta) - \mu \sin(\vartheta - \varphi))Q \}. \end{aligned}$$

Наконец,

$$\frac{d}{d\varphi}(\Delta\zeta) = P'.$$

Если обозначить компоненты вектора бинормали кривой через  $a_1, a_2, a_3$ , то условия сопряжения после дифферен-

цирования по  $\varphi$  запишутся так:

$$\frac{d}{d\varphi} (\Delta\xi) = (a_1\sigma)',$$

$$\frac{d}{d\varphi} (\Delta\eta) = (a_2\sigma)',$$

$$\frac{d}{d\varphi} (\Delta\zeta) = (a_3\sigma)'.$$

Найдем выражения для составляющих  $a_1$ ,  
их в эти формулы.

Поверхность  $F$  в координатах  $u, v$  задается уравнениями

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}} (u \cos \vartheta - v \sin \vartheta),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{b}} (u \sin \vartheta + v \cos \vartheta),$$

$$z = \frac{1}{2} (u^2 + v^2).$$

Вдоль кривой  $\gamma$

$$u = (\lambda + \mu) \cos \varphi, \quad v = (\lambda - \mu) \sin \varphi.$$

Подставляя эти значения  $u, v$  в уравнения поверхности, получим уравнения кривой  $\gamma$ :

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}} ((\lambda + \mu) \cos \varphi \cos \vartheta - (\lambda - \mu) \sin \varphi \sin \vartheta),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{b}} ((\lambda + \mu) \cos \varphi \sin \vartheta + (\lambda - \mu) \sin \varphi \cos \vartheta),$$

$$z = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2} + \lambda\mu \cos 2\varphi.$$

С помощью уравнений кривой находим компоненты вектора бинормали

$$a_1 = \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} = -\frac{4\lambda\mu}{\sqrt{b}} (\lambda + \mu) \sin \vartheta \sin^3 \varphi - \\ - \frac{4\lambda\mu}{\sqrt{b}} (\lambda - \mu) \cos \vartheta \cos^3 \varphi,$$

$$a_2 = \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} = \frac{4\lambda\mu}{\sqrt{a}} (\lambda + \mu) \cos \vartheta \sin^3 \varphi - \\ - \frac{4\lambda\mu}{\sqrt{a}} (\lambda - \mu) \sin \vartheta \cos^3 \varphi,$$

$$a_3 = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{ab}} (\lambda^2 - \mu^2).$$

Подставляя полученные значения  $a_1, a_2, a_3$  в условия сопряжения и включая множитель  $1/\sqrt{ab}$  в  $\sigma$ , получим

$$\begin{aligned} -(\lambda \cos(\varphi + \vartheta) + \mu \cos(\vartheta - \varphi)) P' - Q(\lambda \cos(\varphi + \vartheta) - \\ - \mu \cos(\vartheta - \varphi)) &= -4\lambda\mu \{ \sigma(\lambda + \mu) \sin \vartheta \sin^3 \varphi + \\ &+ \sigma(\lambda - \mu) \cos \vartheta \cos^3 \varphi \}' , \\ -(\lambda \sin(\varphi + \vartheta) + \mu \sin(\vartheta - \varphi)) P' - Q(\lambda \sin(\varphi + \vartheta) - \\ - \mu \sin(\vartheta - \varphi)) &= 4\lambda\mu \{ \sigma(\lambda + \mu) \cos \vartheta \sin^3 \varphi - \\ &- \sigma(\lambda - \mu) \sin \vartheta \cos^3 \varphi \}' , \\ P' &= \{ \sigma(\lambda^2 - \mu^2) \}' . \end{aligned}$$

Умножая второе равенство на  $l$  и прибавляя к первому, получаем

$$\begin{aligned} -P'(\lambda e^{i(\varphi + \vartheta)} + \mu e^{i(\vartheta - \varphi)}) - Q(\lambda e^{i(\varphi + \vartheta)} - \mu e^{i(\vartheta - \varphi)}) &= \\ = \{ 4\lambda\mu\sigma(\lambda + \mu) e^{i\vartheta} l \sin^3 \varphi - 4\lambda\mu\sigma(\lambda - \mu) e^{i\vartheta} \cos^3 \varphi \}' . \end{aligned}$$

Если теперь это равенство сократить на  $e^{i\vartheta}$  и отделить вещественную часть от мнимой, то получаются следующие два соотношения:

$$\begin{aligned} P'(\lambda + \mu) \cos \varphi + Q(\lambda - \mu) \cos \varphi &= \{ 4\lambda\mu(\lambda - \mu) \sigma \cos^3 \varphi \}' , \\ P'(\lambda - \mu) \sin \varphi + Q(\lambda + \mu) \sin \varphi &= - \{ 4\lambda\mu(\lambda + \mu) \sigma \sin^3 \varphi \}' . \end{aligned}$$

Мы видим, что в общем случае для функций  $P$  и  $Q$  получается точно такая же система уравнений, как и в простейшем случае. Так же как и там, мы полагаем

$$\sigma = \text{const.}$$

Тогда

$$\begin{aligned} P &= (\lambda^2 - \mu^2) \sigma , \\ Q &= -6\lambda\mu\sigma \sin 2\varphi . \end{aligned}$$

После этого, так же как и в рассмотренном случае, находим аналитические функции  $\zeta$  и  $\zeta'$ , задающие изгибающие поля

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\alpha}{\omega^2} , \quad \zeta' = \beta \omega^2 + c , \\ \beta &= \frac{3\mu}{\lambda} \sigma , \quad \alpha = \frac{3\mu}{\lambda} \sigma (\lambda^2 + \mu^2) . \end{aligned}$$



С помощью функций  $\xi$  и  $\xi'$  находим по соответствующим формулам изгибающие поля  $\tau$  и  $\tau'$ , а с ними и вектор-функцию, задающую изометрически преобразованную поверхность.

### § 3. Потеря устойчивости оболочек вращения при различных способах нагружения

Среди строго выпуклых оболочек наиболее распространенными, пожалуй, являются оболочки вращения. В связи с этим рассмотрение вопроса об устойчивости таких оболочек представляет значительный практический интерес. В настоящем параграфе мы рассмотрим потерю устойчивости выпуклых оболочек вращения при различных способах нагружения: внутреннее давление, внешнее давление и кручение. В частности, мы определим критические нагрузки в каждом из этих случаев.

Рассмотрению вопроса об устойчивости оболочек вращения мы предположим дополнительное исследование вопроса о потере устойчивости пологих строго выпуклых оболочек под равномерным внешним давлением. Как показано в § 1, жесткость закрепления края такой оболочки предопределяет форму области выпучивания и характер изгибающих полей, на которых рассматривается вариационная задача для функционала  $W = U - A$ . Теперь мы не будем требовать особой жесткости закрепления края, но зато будем предполагать малость области выпучивания и форму ее будем считать эллиптической.

1. Потеря устойчивости строго выпуклой оболочки под равномерным внешним давлением. Пусть потеря устойчивости оболочки под внешним давлением сопровождается выпучиванием конечной области  $G$  эллиптической формы небольших размеров. Естественно считать, что область  $G$  соосна с индикатрисой кривизны в ее центре  $P$ . В частности, область  $G$  и индикатриса могут быть подобны и подобно расположены, что соответствует случаю, рассмотренному в § 1.

Форму оболочки при заметном выпучивании мы будем приближать изометрическим преобразованием исходной поверхности, которое получено в § 2 (см. конец п. 2). При этом, как показано в § 1, энергия деформации оболочки сосредоточена в основном у кривой  $\gamma$  — границы области выпучива-

ния, и на единицу длины кривой  $\gamma$  она определяется по формуле

$$\bar{U} = \frac{2E\delta^2\alpha^2 h}{\sqrt{12}(1-\nu^2)\rho}.$$

Здесь  $h$  — нормальный прогиб по области выпучивания вдоль границы  $\gamma$ ,  $\rho$  — радиус кривизны  $\gamma$ ,  $\alpha$  — угол между соприкасающейся плоскостью кривой  $\gamma$  и касательными плоскостями поверхности,  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Для изометрического преобразования поверхности, построенного в § 2, вдоль границы  $\gamma$  области выпучивания имеем

$$h = \operatorname{Re}(\Delta\zeta)_{\gamma},$$

где  $(\Delta\zeta)_{\gamma}$  — разность вдоль  $\gamma$  аналитических функций, задающих изгибающие поля вне области  $G$  и внутри этой области.

Так как область продавливания  $G$  мала, то угол  $\alpha$  можно определять по формуле

$$\alpha = \frac{k_n}{k},$$

где  $k$  — кривизна кривой  $\gamma$ , а  $k_n$  — нормальная кривизна исходной поверхности в направлении  $\gamma$ . Вычислим  $k$  и  $k_n$ .

Введем как и ранее систему декартовых координат  $x, y, z$ , приняв касательную плоскость в центре выпучивания  $P$  за плоскость  $xy$ , нормаль к поверхности — за ось  $z$ , а точку  $P$  — за начало координат. Оси координат  $x$  и  $y$  направим по касательным к линиям кривизны в точке  $P$ . Тогда вблизи точки  $P$  поверхность задается уравнением

$$z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2).$$

Первая и вторая квадратичные формы поверхности вблизи точки  $P$  будут

$$I = dx^2 + dy^2,$$

$$II = a dx^2 + b dy^2.$$

Отсюда для нормальной кривизны поверхности получается выражение

$$k_n = \frac{a dx^2 + b dy^2}{dx^2 + dy^2}.$$

Как показано в § 2, кривая  $\gamma$  задается уравнениями

$$x = p \cos \varphi, \quad y = q \sin \varphi,$$

$$p = \frac{\lambda + \mu}{\sqrt{a}}, \quad q = \frac{\lambda - \mu}{\sqrt{b}},$$

а  $\lambda$  и  $\mu$  находятся из уравнений

$$\lambda + \mu = \sqrt{\frac{a}{A}}, \quad \lambda - \mu = \sqrt{\frac{b}{B}}.$$

Постоянные  $A$  и  $B$  определяют область выпучивания  $G$ :

$$Ax^2 + By^2 \leq 1.$$

Ввиду того, что область  $G$  мала, кривизну  $\gamma$  можно определять по ее проекции на плоскость  $xu$ , которая задается теми же двумя уравнениями

$$x = p \cos \varphi, \quad y = q \sin \varphi.$$

При этом получается следующее выражение для кривизны:

$$k = \frac{pq}{(p^2 \sin^2 \varphi + q^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}.$$

Подставляя в общее выражение для нормальной кривизны поверхности выражения

$$dx = -p \sin \varphi d\varphi, \quad dy = q \cos \varphi d\varphi,$$

получим нормальную кривизну поверхности в направлении  $\gamma$

$$k_n = \frac{(\lambda + \mu)^2 \sin^2 \varphi + (\lambda - \mu)^2 \cos^2 \varphi}{p^2 \sin^2 \varphi + q^2 \cos^2 \varphi}.$$

Если теперь подставить полученные значения в формулу для  $\bar{U}$  и проинтегрировать по дуге кривой  $\gamma$ , то получим полную энергию деформации. Имеем

$$\frac{\alpha^2}{\rho} = \left( \frac{(\lambda + \mu)^2 \sin^2 \varphi + (\lambda - \mu)^2 \cos^2 \varphi}{p^2 \sin^2 \varphi + q^2 \cos^2 \varphi} \right)^2 \frac{(p^2 \sin^2 \varphi + q^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}{pq},$$

$$ds = (p^2 \sin^2 \varphi + q^2 \cos^2 \varphi)^{1/2} d\varphi.$$

Отсюда

$$\int_{\gamma} \frac{\alpha^2}{\rho} ds = \int_0^{2\pi} [(\lambda + \mu)^2 \sin^2 \varphi + (\lambda - \mu)^2 \cos^2 \varphi]^2 \frac{d\varphi}{\rho q} = \\ = (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2\mu^2) \frac{2\pi}{\rho q}.$$

Учитывая значения  $\rho$  и  $q$ , получим

$$\int_{\gamma} \frac{\alpha^2}{\rho} ds = \frac{2\pi \sqrt{ab}}{\lambda^2 - \mu^2} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2\mu^2).$$

Полная энергия деформации равна

$$U = \int_{\gamma} \bar{U} ds = \frac{2E \delta^2 h}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)} \frac{2\pi \sqrt{ab}}{\lambda^2 - \mu^2} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2\mu^2).$$

Ввиду малости области  $G$ , при нашем выборе системы координат величину  $h$  можно принять равной разности составляющих по оси  $z$  изгибающих полей  $\tau$  и  $\tau'$  (§ 2). При этом

$$h = P(\varphi) = (\lambda^2 - \mu^2) \sigma.$$

В результате для энергии деформации оболочки получается следующее окончательное выражение:

$$U = \frac{2E \delta^2 \sigma 2\pi \sqrt{ab}}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2\mu^2).$$

Вычислим теперь производимую внешним давлением  $p$  работу  $A$ . Если изменение (при деформации) объема, ограничиваемого оболочкой, обозначить  $\Delta V$ , то работа

$$A = p \Delta V.$$

Так как область  $G$  мала, то существенные деформации оболочка испытывает лишь вблизи точки  $P$ . Поэтому величина  $\Delta V$  определяется с помощью интеграла

$$\Delta V = \int \int \xi dx dy,$$

где  $\xi$  — смещение точек поверхности при деформации в направлении оси  $z$ . Величина смещения  $\xi$  определяется двумя аналитическими функциями  $\xi(\omega)$  и  $\xi'(\omega)$ . Именно, вне области

выпучивания

$$\zeta = \operatorname{Re} \zeta(w),$$

а внутри этой области

$$\zeta = \operatorname{Re} \zeta'(w).$$

(Выражения для функций  $\zeta(w)$  и  $\zeta'(w)$  получены в § 2.)  
Таким образом,

$$\Delta V = \operatorname{Re} \left\{ \iint \zeta'(w) dx dy + \iint \zeta(w) dx dy \right\}.$$

Здесь в первом слагаемом интегрирование распространяется на внутренность эллипса

$$Ax^2 + By^2 = 1,$$

а во втором — на оставшуюся часть плоскости  $xu$ .

Переходя от переменных  $x, y$  к переменным  $u, v$ ,

$$x = \frac{u}{\sqrt{a}}, \quad y = \frac{v}{\sqrt{b}},$$

будем иметь

$$\iint \zeta'(w) dx dy = \frac{1}{\sqrt{ab}} \iint \zeta'(w) du dv,$$

где интегрирование справа выполняется по внутренности эллипса

$$\frac{A}{a} u^2 + \frac{B}{b} v^2 = 1$$

на плоскости комплексного переменного  $w = u + iv$ . Для вычисления этого интеграла рассмотрим криволинейный интеграл по границе указанного эллипса

$$J' = \oint \zeta'(w) \bar{w} dw.$$

Преобразуя интеграл  $J'$  к интегралу по площади эллипса с помощью формулы Грина — Остроградского и принимая во внимание аналитичность функции  $\zeta'(w)$ , будем иметь

$$\oint \zeta'(w) \bar{w} dw = -2i \iint \zeta'(w) du dv.$$

Аналогично, интеграл

$$J = \oint \zeta(w) \bar{w} dw$$

преобразуется к интегралу по внешности эллипса. Здесь существенно заметить, что  $\zeta(w)$  убывает на бесконечности как  $1/w^2$ . При том же направлении интегрирования по контуру эллипса будет

$$\oint \zeta(w) \bar{w} dw = 2i \iint \zeta(w) du dv.$$

Подставляя найденные выражения интегралов в формулу для  $\Delta V$ , получим

$$\Delta V = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{Re} \frac{1}{2i} \oint (\zeta(w) - \zeta'(w)) \bar{w} dw.$$

Заметим, что на контуре интегрирования

$$\zeta(w) - \zeta'(w) = \Delta \zeta = P + iQ,$$

где  $P$  и  $Q$  имеют следующие значения:

$$P = (\lambda^2 - \mu^2) \sigma, \quad Q = -6\lambda\mu\sigma \sin 2\varphi.$$

Перейдем теперь от переменного  $w$  к  $\omega$ , положим

$$w = \lambda\omega + \frac{\mu}{\omega}.$$

На плоскости  $\omega$  контуром интегрирования является единичная окружность и, следовательно, на контуре имеем

$$w = \lambda e^{i\varphi} + \mu e^{-i\varphi},$$

$$\bar{w} = \lambda e^{-i\varphi} + \mu e^{i\varphi},$$

$$\Delta \zeta = (\lambda^2 - \mu^2) \sigma - 3\lambda\mu\sigma (e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}).$$

Подставляя полученные выражения  $w$ ,  $\bar{w}$ ,  $\Delta \zeta$  в интеграл

$$\oint_{|\omega|=1} \Delta \zeta(w) \bar{w} dw,$$

без труда выведем интегральное соотношение и находим следующее соотношение:

$$\oint_{|\omega|=1} \Delta \zeta(w) \bar{w} dw = 2\pi i \sigma (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2\mu^2).$$

Вместе с тем получаем

$$\Delta V = \frac{\pi\sigma}{\sqrt{ab}} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2\mu^2).$$

Следовательно,

$$A = \frac{\pi p \sigma}{\sqrt{ab}} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2\mu^2).$$

Величины  $\lambda$ ,  $\mu$  характеризуют форму области выпучивания, а  $\sigma$  — величину выпучивания. В связи с этим представляется целесообразным ввести единый параметр

$$\epsilon = \pi \sigma (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2\mu^2),$$

характеризующий закритическую деформацию оболочки. В зависимости от этого параметра энергия деформации оболочки и производимая внешним давлением работа определяются по формулам

$$U = \frac{4E \delta^2 \sqrt{ab} \epsilon}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)},$$

$$A = \frac{p \epsilon}{\sqrt{ab}}.$$

Теперь из условия равновесия оболочки в момент выпучивания

$$\frac{d}{d\epsilon} (U - A) = 0$$

находим воспринимаемую оболочкой нагрузку. Имеем

$$\frac{4E \delta^2 \sqrt{ab}}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)} - \frac{p}{\sqrt{ab}} = 0.$$

Отсюда

$$p = \frac{4E \delta^2 ab}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)}.$$

Замечая, что  $a$  и  $b$  — главные кривизны оболочки в центре выпучивания, можем переписать эту формулу в виде

$$p = \frac{2E \delta^2}{\sqrt{3} (1 - \nu^2) R_1 R_2},$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — главные радиусы кривизны.

Мы видим, что и при более общих предположениях о характере выпучивания оболочки в момент потери устойчивости получается то же критическое давление, что и в простейшем рассмотрении § 1.

2. **Специальное изометрическое преобразование выпуклой поверхности вращения.** Опыт показывает, что выпуклая оболочка вращения под внутренним давлением может терять устойчивость с образованием системы правильно расположенных эллиптических вмятин вдоль некоторой параллели (рис. 26). Физическая причина такой формы потери устойчивости состоит в том, что для вмятин, вытянутых в направлении меридианов, при указанной деформации оболочки может иметь место общее увеличение ограничиваемого ею объема, несмотря на продавливание оболочки по системе вмятин внутрь этого объема\*).

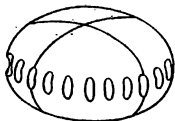


Рис. 26.

Так же как и в предыдущем рассмотрении, мы будем приближать форму оболочки с выпучиванием изометрическим преобразованием исходной поверхности. При этом мы не будем исследовать деталей этого преобразования и ограничимся определением только таких величин, связанных с деформацией, которые нам понадобятся при решении вопроса об устойчивости оболочки. В частности, нас интересует вопрос о том, насколько удалятся друг от друга плоскости параллелей, ограничивающих систему вмятин.

Ввиду того, что деформация оболочки вне зоны возникающих вмятин мала, конечное изгибание поверхности в этой части можно считать бесконечно малым изгибанием. Соответствующее изгибающее поле мы определим путем суперпозиции изгибающих полей, связанных с образованием отдельных вмятин. Изгибающее поле, обусловленное образованием одной вмятины (области выпучивания), мы возьмем в той форме, как оно получено в § 2.

Пусть  $A$  — произвольная точка поверхности, находящаяся на малом расстоянии  $h$  от параллели  $\gamma$ , вдоль которой располагаются области выпучивания. Определим  $\tilde{\xi}$  — составляющую

\*) Можно привести и другое соображение, поясняющее потерю устойчивости выпуклой оболочки вращения под внутренним давлением. При определенном соотношении между главными кривизнами оболочки внутреннее давление может вызвать появление сжимающих усилий в направлении параллелей. Эти усилия при известной их интенсивности и вызывают потерю устойчивости.



изгибающего поля в направлении меридиана. Пусть  $P$  — основание геодезического перпендикуляра, опущенного из точки  $A$  на параллель  $\gamma$ . Введем декартовы координаты  $x, y, z$ , приняв касательную к меридиану за ось  $x$ , касательную к параллели за ось  $y$ , а нормаль к поверхности за ось  $z$  и точку  $P$  за начало координат.

Естественно предположить, что на величину составляющей  $\tilde{\xi}$  существенно влияют только выпучивания оболочки вблизи точки  $P$ . Поэтому, если составляющую изгибающего поля по меридиану от области выпучивания с центром  $P$  обозначить  $\xi(x, y)$ , то интересующая нас составляющая  $\tilde{\xi}$ , связанная с появлением всей системы областей выпучивания, будет

$$\tilde{\xi} = \sum_k \xi(h, y_k),$$

где  $y_k$  обозначают координаты центров смежных областей выпучивания.

Рассмотрим более подробно функцию  $\xi(x, y)$ . В связи с этим напомним, что наряду с переменными  $x, y$  мы ввели переменные  $u, v$ , связанные с  $x, y$  соотношениями

$$x \sqrt{a} = u, \quad y \sqrt{b} = v,$$

комплексное переменное

$$w = u + iv$$

и комплексное переменное  $\omega$ ,

$$w = \lambda \omega + \frac{\mu}{\omega}$$

(см. § 2). Здесь  $a$  и  $b$  — главные кривизны в центре выпучивания  $P$ , а  $\lambda, \mu$  — параметры, характеризующие форму области выпучивания. Существенно заметить, что для малых областей выпучивания — это нами будет предполагаться —  $\lambda$  и  $\mu$  малы.

В § 2 для составляющей  $\xi$  изгибающего поля, связанного с появлением одной области выпучивания, мы получили следующее выражение:

$$\xi = \sqrt{a} \operatorname{Re} \left\{ -u\zeta + \int \zeta d\omega \right\},$$

где  $\zeta(\omega)$  — аналитическая функция комплексного переменного  $\omega$ , которая вне области выпучивания определяется

по формуле

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega^2}, \quad \alpha = \frac{3\mu}{\lambda} (\lambda^2 + \mu^2) \sigma.$$

Подставляя это значение  $\zeta$  в формулу для  $\xi$  и вы интегрирование, получим

$$\xi = \alpha \sqrt{a} \operatorname{Re} \left\{ -\frac{u}{\omega^2} - \frac{\lambda}{\omega} + \frac{\mu}{3\omega^3} \right\}.$$

Заметим, что при ограниченном снизу значении  $|\omega|$  соответствующее значение  $\omega$ , определяемое соотношением

$$\omega = \lambda\omega + \frac{\mu}{\omega},$$

при малых  $\lambda$  и  $\mu$  достаточно велико по абсолютной величине. Поэтому при малых  $\lambda$  и  $\mu$  слагаемым  $\mu/3\omega^3$  в формуле для  $\xi$  можно пренебречь; кроме того, можно считать, что

$$\omega = \lambda\omega.$$

Если учесть эти замечания, то формулу для составляющей  $\xi$  можно представить в следующем упрощенном виде:

$$\xi = -\lambda^2 \alpha \sqrt{a} \operatorname{Re} \left\{ \frac{u}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} \right\}.$$

Выделяя вещественную часть, получим

$$\xi = -\lambda^2 \alpha \sqrt{a} u^3 \frac{1}{(u^2 + v^2)^2}.$$

Пусть теперь

$$v_k = \sqrt{b} y_k.$$

Тогда

$$\tilde{\xi} = -\lambda^2 \alpha \sqrt{a} u^3 \sum_k \frac{1}{(u^2 + v_k^2)^2},$$

$$u = h \sqrt{a}.$$

Суммирование в правой части равенства по предположению распространяется на смежные области. Однако ввиду быстрой сходимости ряда можно считать, что суммирование выполняется по всем  $k$ , т. е. что

$$\tilde{\xi} = -\lambda^2 \alpha \sqrt{a} u^3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(u^2 + v_k^2)^2}.$$

При достаточной густоте расположения областей выпучивания, то есть малом

$$\Delta v = v_k - v_{k-1},$$

суммирование в формуле для  $\tilde{\xi}$  можно заменить интегрированием. Тогда получим

$$\tilde{\xi} = -\frac{\lambda^2 \alpha \sqrt{a}}{\Delta v} u^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{(u^2 + v^2)^2}.$$

Или, производя замену переменной

$$v = ut,$$

$$\tilde{\xi} = -\frac{\lambda^2 \alpha \sqrt{a}}{\Delta v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}.$$

Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$\tilde{\xi} = -\frac{\pi \lambda^2 \alpha \sqrt{a}}{2 \Delta v}.$$

Вводя сюда значение

$$\alpha = -\frac{3\mu}{\lambda} (\lambda^2 + \mu^2) \sigma,$$

получим следующую окончательную формулу для  $\tilde{\xi}$ :

$$\tilde{\xi} = \frac{3\pi \sqrt{a} \lambda \mu (\lambda^2 + \mu^2) \sigma}{2 \Delta v}.$$

Если точку  $A$  взять с другой стороны зоны областей выпучивания, то она при рассматриваемой деформации получит в точности такое же смещение по меридиану, но в противоположном направлении. Отсюда следует, что интересующее нас удаление плоскостей параллелей, ограничивающих зону областей выпучивания, происходит на величину

$$\varepsilon = \frac{3\pi \sqrt{a} \lambda \mu (\lambda^2 + \mu^2) \sigma \cos \alpha}{\Delta v},$$

## ЧНЫЕ СПОСОБЫ НАГРУЖЕНИЯ

где  $\alpha$  — угол между касательной к меридиану и осью поверхности. Если ввести вместо  $v$  переменную

$$y = \frac{v}{\sqrt{b}},$$

$$\varepsilon = \frac{3\pi}{\Delta y} \sqrt{\frac{a}{b}} \lambda \mu (\lambda^2 + \mu^2) \sigma.$$

Напомним, что здесь  $a$  и  $b$  — нормальные кривизны поверхности в направлении меридиана и параллели соответственно,  $\Delta y$  — расстояние между центрами смежных областей выпучивания, а  $\lambda \mu (\lambda^2 + \mu^2) \sigma$  — величина, характеризующая отдельно взятую область выпучивания.

Определением величины  $\varepsilon$  мы закончим наше рассмотрение изометрически преобразованной поверхности и перейдем к исследованию вопроса об устойчивости оболочки.

**3. Критическое внутреннее давление для выпуклой оболочки вращения.** Критическое внутреннее давление, при котором происходит потеря устойчивости оболочки вращения с образованием системы областей выпучивания вдоль некоторой параллели, мы определим, рассматривая упругое равновесие при заметном выпучивании. Условие равновесия

$$d(U - A) = 0,$$

где  $U$  — энергия деформации оболочки,  $A$  — производимая давлением работа.

Для энергии  $U_1$  деформации оболочки, связанной с выпучиванием одной области, в п. 1 мы нашли выражение

$$U_1 = \frac{2E \delta^2 2\pi \sqrt{ab}}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)} \sigma (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2 \mu^2).$$

Если число областей выпучивания обозначить  $n$ , то общая энергия деформации оболочки будет

$$U = \frac{2E \delta^2 2\pi \sqrt{ab}}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)} \sigma (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2 \mu^2) n.$$

Обратимся теперь к работе  $A$ . Если связанное с выпучиванием изменение объема, ограничиваемого оболочкой,

обозначить  $\Delta V$ , то работа равна

$$A = p \Delta V,$$

где  $p$  — внутреннее давление.

Проведем перпендикулярно оси поверхности две плоскости, ограничивающие зону областей выпучивания. Изменение объема  $\Delta V$  обусловлено удалением проведенных плоскостей при деформации оболочки и образованием самих областей выпучивания. Будем обозначать соответствующие части  $\Delta V$  через  $\Delta V_e$  и  $\Delta V_i$ .

Величина  $\Delta V_i$  отрицательна и для одной области выпучивания определяется по формуле (ср. п. 1)

$$\Delta V_i' = - \frac{\pi \sigma}{V_{ab}} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2 \mu^2).$$

Следовательно, для всех  $n$  областей

$$\Delta V_i = - \frac{\pi \sigma}{V_{ab}} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2 \mu^2) n.$$

Далее, имеем

$$\Delta V_e = \pi r^2 \epsilon,$$

где  $r$  — радиус параллели, вдоль которой располагаются области выпучивания, а  $\epsilon$  — удаление плоскостей параллелей, ограничивающих зону областей выпучивания, при деформации оболочки. Подставляя сюда значение  $\epsilon$ , найденное в п. 2, получим

$$\Delta V_e = \pi r^2 \frac{3\pi}{\Delta y} \sqrt{\frac{a}{b}} \lambda \mu (\lambda^2 + \mu^2) \sigma \cos \alpha.$$

Итак, для работы  $A$ , производимой внутренним давлением  $p$ , получается выражение

$$A = - \frac{\pi \sigma (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2 \mu^2) p n}{V_{ab}} + \pi r^2 \frac{3\pi}{\Delta y} \sqrt{\frac{a}{b}} \lambda \mu (\lambda^2 + \mu^2) \sigma p \cos \alpha.$$

Фиксировав форму области выпучивания (параметры  $\lambda$ ,  $\mu$ ), будем варьировать прогиб в областях выпучивания (параметр  $\sigma$ ). Тогда из условия равновесия

$$\frac{d}{d\sigma} (U - A) = 0$$

получается следующее соотношение для величины давления  $p$ , воспринимаемого оболочкой при выпучивании:

$$\frac{2E\delta^2\pi V\sqrt{ab}}{\sqrt{12}(1-\nu^2)}(\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2\mu^2) + \frac{\pi}{V\sqrt{ab}}(\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2\mu^2)pr - \\ - \pi\rho^2 \frac{3\pi}{\Delta y} \sqrt{\frac{a}{b}} \lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2) p \cos \alpha = 0.$$

Умножая это соотношение на

$$\frac{\Delta y}{2\pi^2\rho} \sqrt{ab},$$

$$\Delta y n = 2\pi\rho,$$

будем иметь

$$\frac{4E\delta^2 ab}{\sqrt{12}(1-\nu^2)}(\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2\mu^2) + \\ + (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2\mu^2) p - \frac{3\rho}{2} \alpha \lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2) p \cos \alpha = 0.$$

Разделим это соотношение на

$$\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2\mu^2$$

$$\vartheta = \frac{\lambda\mu}{\lambda^2 + \mu^2}.$$

Получим

$$\frac{4E\delta^2 ab}{\sqrt{12}(1-\nu^2)} + p - \frac{3\rho \cos \alpha}{2} \frac{\vartheta p}{1 + 2\vartheta^2} = 0.$$

Отсюда

$$p = \frac{4E\delta^2 ab}{\sqrt{12}(1-\nu^2)} \frac{1}{\frac{3\rho \cos \alpha}{2} \vartheta^* - 1},$$

$$\vartheta^* = \frac{\vartheta}{1 + 2\vartheta^2}.$$

Параметр  $\vartheta^*$  известным образом выражается через параметры  $\lambda$ ,  $\mu$  и, следовательно, характеризует форму области выпучивания. Выясним интервал допустимых значений параметра  $\vartheta^*$ . Для этого прежде всего заметим, что величина

$$\vartheta = \frac{\lambda\mu}{\lambda^2 + \mu^2}$$

заклучена между  $-1/2$  и  $+1/2$ . Далее,  $\vartheta^*$  монотонно зависит от  $\vartheta$ , так как

$$\frac{d\vartheta^*}{d\vartheta} = \frac{1-2\vartheta^2}{(1+2\vartheta^2)^2} > 0.$$

Следовательно,  $\vartheta^*$  заключено между  $-1/3$  и  $+1/3$ .

Принимая во внимание интервал допустимых значений  $\vartheta^*$ , заключаем, что *наименьшее давление, при котором оболочка может потерять устойчивость с выпучиванием вдоль заданной параллели, определяется по формуле*

$$p = \frac{2E\delta^2 ab}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} \frac{1}{\frac{a\rho}{2} \cos \alpha - 1}.$$

Напомним, что в этой формуле  $a$  и  $b$  — нормальные кривизны поверхности вдоль меридиана и параллели соответственно,  $\rho$  — радиус параллели,  $\alpha$  — угол между касательной к меридиану и осью поверхности. Если в эту формулу ввести главные радиусы кривизны поверхности  $R_1$  и  $R_2$ ,

$$\frac{1}{a} = R_1, \quad \frac{1}{b} = R_2,$$

$$\frac{\cos \alpha}{\rho} = \frac{1}{R_2},$$

то наша формула принимает вид

$$p = \frac{2E\delta^2}{\sqrt{3}(1-\nu^2) R_1 R_2} \frac{1}{\frac{\rho^2}{2R_1 R_2} - 1}.$$

Наименьшее значение  $p$  мы получили, полагая  $\vartheta^* = 1/3$ . Этому значению  $\vartheta^*$  соответствует  $\vartheta = 1/2$ . Так как

$$\vartheta = \frac{\lambda\mu}{\lambda^2 + \mu^2},$$

то это возможно только при  $\lambda = \mu$ . А это значит, область выпучивания, задаваемая уравнениями

$$x = \frac{\lambda + \mu}{\sqrt{a}} \cos \varphi, \quad y = \frac{\lambda - \mu}{\sqrt{b}} \sin \varphi,$$

вырождается в отрезок оси  $x$  (меридиана). Физический смысл этого результата состоит в том, что *возникающие в резуль-*

такие потери устойчивости оболочки вмятины должны быть сильно вытянуты вдоль меридианов. Это действительно наблюдается в соответствующих опытах.

Применим полученную нами формулу к определению критического давления для сплюснутого эллипсоида вращения. Пусть  $a$  и  $b$  — полуоси эллипсоида,  $b < a$ . Ввиду того, что гауссова кривизна сплюснутого эллипсоида монотонно растет по мере приближения к экватору вместе с радиусом параллели  $\rho$ , минимум  $p$  получается при выпучивании вдоль экватора. На экваторе

$$\rho = a, \quad R_1 = a, \quad R_2 = \frac{a}{b^2}.$$

Отсюда

$$p = \frac{2E\delta^2}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} \frac{1}{\frac{a^2}{2} - b^2}.$$

В случае сильно сплюснутого эллипсоида ( $b \ll a$ )

$$p \simeq \frac{4E\delta^2}{\sqrt{3}(1-\nu^2)a^2}.$$

Существенно заметить, что величина критического давления при любом сплющивании не снижается ниже этого значения.

**4. Потеря устойчивости выпуклой оболочки вращения под внешним давлением.** В § 1 и п. 1 настоящего параграфа был рассмотрен вопрос о потере устойчивости пологой выпуклой оболочки под внешним давлением. При этом для величины  $p$  критического давления была найдена формула

$$p = \frac{2E\delta^2}{\sqrt{3}(1-\nu^2)R_1R_2}.$$

Получая этот результат, мы при определении производим внешним давлением работы

$$A = p \Delta V$$

использовали предположение о пологости оболочки. Именно, изменение объема  $\Delta V$ , ограничиваемого оболочкой, мы вычисляли по формуле

$$\Delta V = \int \int \zeta dx dy,$$



где  $\xi$  — составляющая по оси  $z$  изгибающего поля при деформации оболочки. Эта формула была бы точной, если бы изгибающее поле было перпендикулярно плоскости  $xu$ . В действительности это можно считать выполненным только вблизи центра выпучивания. В связи с этим для непологий оболочки мы можем ожидать другой результат о величине внешнего критического давления. Рассмотрим этот вопрос для выпуклых оболочек вращения.

Предположим, что выпуклая оболочка вращения под действием внешнего давления теряет устойчивость с образованием системы вмятин, расположенных вдоль некоторой параллели (рис. 27). Судя по результату, полученному в п. 2,

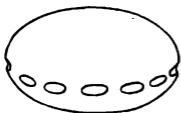


Рис. 27.

можно думать, что такая форма потери устойчивости может реализоваться, если вмятины сильно вытянуты вдоль параллели, на которой они располагаются. Так же как и в случае внутреннего давления, изменение (при деформации) объема, ограниченного оболочкой, мы будем составлять из двух частей —  $\Delta V_i$  и  $\Delta V_e$ ;  $\Delta V_i$  — уменьшение объема, связанное непосредственно с образованием областей выпучивания, а  $\Delta V_e$  обусловлено сближением плоскостей параллелей, ограничивающих зону областей выпучивания. Имеем

$$\Delta V_i = \frac{\pi \sigma}{\sqrt{ab}} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2 \mu^2) n,$$

$$\Delta V_e = -\pi r^2 \frac{3\pi}{\Delta y} \lambda \mu (\lambda^2 + \mu^2) \sigma \cos \alpha.$$

Следовательно, проводимая внешним давлением  $p$  работа при деформации оболочки равна

$$A = \frac{\pi \sigma}{\sqrt{ab}} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2 \mu^2) p n - \pi r^2 \frac{3\pi}{\Delta y} \sqrt{\frac{a}{b}} \lambda \mu (\lambda^2 + \mu^2) \sigma p \cos \alpha.$$

Эта формула отличается только знаком от соответствующей формулы для случая внутреннего давления.

РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ НАГРУЖЕНИЯ

Что касается энергии деформации, прежнее выражение

$$U = \frac{2E \delta^2 \pi \sqrt{ab}}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2 \mu^2) \sigma n.$$

Так же как и в случае внутреннего давления, из условия равновесия оболочки

$$\frac{d}{d\sigma} (U - A) = 0$$

получаем следующее соотношение для величины давления  $p$ , воспринимаемого оболочкой при выпучивании:

$$\begin{aligned} \frac{2E \delta^2 \pi \sqrt{ab}}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2 \mu^2) n - \\ - \frac{\pi}{V ab} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2 \mu^2) n p + \\ + \pi r^2 \frac{3\pi}{\Delta y} \sqrt{\frac{a}{b}} \lambda \mu (\lambda^2 + \mu^2) p \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

Это соотношение известным способом упрощается и, будучи разрешено относительно  $p$ , дает для него следующее значение:

$$p = \frac{4E \delta^2 ab}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)} \frac{1}{-\frac{3\pi r \cos \alpha}{2} \vartheta^* + 1},$$

где, как и преж

$$\vartheta^* = \frac{\vartheta}{1 + 2\vartheta^2},$$

$$\vartheta = \frac{\lambda \mu}{\lambda^2 + \mu^2}.$$

Наименьшее значение  $p$  получается при наибольшем по абсолютной величине отрицательном значении  $\vartheta^*$ , то есть при  $\vartheta = -1/3$ .

Если это значение  $\vartheta^*$  подставить в формулу для  $p$ , то получим

$$p = \frac{4E \delta^2 ab}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)} \frac{1}{\frac{3\pi r}{2} \cos \alpha + 1}.$$

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫ

Применение этой формулы для пологих оболочек значение, мало отличающееся от полученного ранее

$$p = \frac{2E \delta^2 ab}{\sqrt{3} (1 - \nu^2)},$$

так как для пологих оболочек  $\alpha \simeq \pi/2$  и,  $\cos \alpha \simeq 0$ .

Выясним форму областей выпучивания. Так как  $\vartheta^* = -1/3$ , то  $\vartheta = -1/2$ . Отсюда следует, что  $\lambda = -\mu$ . Область выпучивания задается уравнением

$$x = \frac{\lambda + \mu}{\sqrt{a}} \cos \varphi, \quad y = \frac{\lambda - \mu}{\sqrt{b}} \sin \varphi.$$

При  $\lambda = -\mu$  наш эллипс вырождается в отрезок оси  $y$ . Физически это значит, что области выпучивания при потере устойчивости оболочки под внешним давлением сильно вытянуты вдоль параллели.

Так же как в случае внутреннего давления, формулу для критической нагрузки можно преобразовать к виду

$$p = \frac{4E\delta^2}{\sqrt{12} (1 - \nu^2) R_1 R_2} \frac{1}{\frac{\rho^2}{2R_1 R_2} + 1},$$

$$p = \frac{2E\delta^2}{\sqrt{3} (1 - \nu^2)} \frac{1}{\frac{\rho^2}{2} + R_1 R_2}.$$

Напомним, что здесь  $R_1$  и  $R_2$  — главные радиусы кривизны оболочки вдоль параллели, где происходит выпучивание,  $\rho$  — радиус параллели.

В качестве приложения полученного результата рассмотрим потерю устойчивости замкнутой сферической оболочки радиуса  $R$ . Здесь

$$R_1 = R, \quad R_2 = R.$$

Минимум  $p$  получается при  $\rho = R$ , то есть при образовании вмятин вдоль экватора. Для величины критического давления получается формула

$$p = \frac{2E\delta^2}{\sqrt{3} (1 - \nu^2) R^2} \cdot \frac{2}{3}.$$

Таким образом, найденное значение составляет  $2/3$  от значения, полученного для пологих оболочек.

**Замечание.** По данным некоторых опытов над сферическими сегментами, описанных в книге А. С. Вольмира [9], выпучивание под внешним давлением начинается у края сегмента. Можно думать, что при этом имеет место потеря устойчивости, рассмотренная в настоящем пункте.

**Б. Потеря устойчивости выпуклой оболочки вращения при кручении.** Оболочка вращения, находящаяся под действием крутящего момента, приложенного к краю оболочки, может терять устойчивость с образованием областей выпучивания, наклоненных к меридиану (рис. 28). Рассмотрим вопрос о величине крутящего момента, вызывающего потерю устойчивости такого вида.

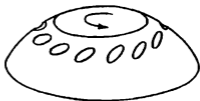


Рис. 28.

Приближая деформированную поверхность оболочки изометрическим преобразованием исходной формы, мы будем пользоваться теми же соображениями, что и в п. 2 для случая внутреннего давления. Ввиду того, что области выпучивания наклонены к меридиану, происходит закручивание оболочки на некоторый угол  $\varepsilon$ . Определим величину этого угла.

Возьмем на поверхности произвольную точку  $A$  вне зоны областей выпучивания, но вблизи этой зоны, и найдем смещение этой точки вдоль параллели при рассматриваемой деформации оболочки. Проведем из точки  $A$  перпендикуляр на параллель  $\gamma$ , где располагаются центры выпучивания, и обозначим через  $P$  основание этого перпендикуляра. Так же, как и в п. 2, вводим декартовы координаты, приняв точку  $P$  за начало координат, касательную плоскость в этой точке за плоскость  $xu$ , а ось  $x$  направим по меридиану поверхности.

Пусть  $\tilde{\eta}$  — интересующее нас смещение точки  $A$ . Тогда, предполагая, что на величину  $\tilde{\eta}$  существенно влияют только области выпучивания, расположенные вблизи точки  $P$ , можем записать

$$\tilde{\eta} = \sum_k \eta(k, y_k).$$

Здесь  $\eta(x, y)$  — составляющая по оси  $y$  изгибающего поля, соответствующего области выпучивания с центром  $P$ ,  $h$  — расстояние точки  $A$  от параллели  $\gamma$ , а  $y_k$  — координаты центров областей выпучивания, близких к  $P$ .

Рассмотрим функцию  $\eta(x, y)$ . Она выражается через аналитическую функцию

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega^2}$$

по формуле

$$\eta = \alpha \sqrt{b} \operatorname{Re} \left\{ -(u \sin \vartheta + v \cos \vartheta) - i e^{i\vartheta} \int \zeta d\omega \right\}.$$

Подставляя в эту формулу  $\zeta = \alpha/\omega^2$  и замечая, что

$$\omega = \lambda\omega + \frac{\mu}{\omega},$$

будем

$$\eta = \alpha \sqrt{b} \operatorname{Re} \left\{ -\frac{(u \sin \vartheta + v \cos \vartheta)}{\omega^2} + \frac{i\lambda e^{i\vartheta}}{\omega} - \frac{i\mu e^{i\vartheta}}{\omega^3} \right\}.$$

Для малых областей выпучивания значение  $|\omega|$  велико. Поэтому можно считать, что

$$\eta = \alpha \sqrt{b} \operatorname{Re} \left\{ -\frac{(u \sin \vartheta + v \cos \vartheta)}{\omega^2} + \frac{i\lambda e^{i\vartheta}}{\omega} \right\}.$$

По той же причине

$$\omega \simeq \lambda\omega.$$

Таким образом,

$$\eta = \alpha \lambda^2 \sqrt{b} \operatorname{Re} \left\{ -\frac{(u \sin \vartheta + v \cos \vartheta)}{\omega^2} + \frac{i e^{i\vartheta}}{\omega} \right\}.$$

Перейдем от переменных  $u, v$  к  $x, y$ . Имеем

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}} (u \cos \vartheta - v \sin \vartheta),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{b}} (u \sin \vartheta + v \cos \vartheta),$$

$$x \sqrt{a} + iy \sqrt{b} = (u + iv) e^{i\vartheta} = \omega e^{i\vartheta},$$

$$ax^2 + by^2 = u^2 + v^2 = |\omega|^2.$$

С помощью этих соотношений выражение для  $\eta$  преобразуется к виду

$$\eta = 2\lambda^2\alpha \sqrt{b} \frac{2y^3b \sqrt{b} \cos 2\theta - (3xy^2b \sqrt{a} + x^3a \sqrt{a}) \sin 2\theta}{(ax^2 + by^2)^2}.$$

Подставляя это значение в выражение  $\tilde{\eta}$ , будем иметь

$$\tilde{\eta} = 2\lambda^2\alpha \sqrt{b} \sum_k \frac{2y_k^3b \sqrt{b} \cos 2\theta - (3hy_k^2b \sqrt{a} + h^3a \sqrt{a}) \sin 2\theta}{(ah^2 + by_k^2)^2}.$$

Ввиду того, что области выпучивания расположены симметрично относительно точки  $A$ , суммирование по первому слагаемому можно опустить, приняв

$$\tilde{\eta} = -2\lambda^2\alpha \sqrt{b} \sin 2\theta \sum_k \frac{3hy_k^2b \sqrt{a} + h^3a \sqrt{a}}{(ah^2 + by_k^2)^2}.$$

Дальше, как и в п. 2, в правой части от суммирования переходим к интегралу. Именно, полагая

$$\Delta y = y_k - y_{k-1},$$

будем иметь

$$\tilde{\eta} = -\frac{2\lambda^2\alpha \sqrt{b} \sin 2\theta}{\Delta y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3hy^2b \sqrt{a} + h^3a \sqrt{a}}{(ah^2 + by^2)^2} dy.$$

Вводя новое переменное  $t$

$$y = h \sqrt{\frac{a}{b}} t,$$

получим

$$\tilde{\eta} = -\frac{2\lambda^2\alpha \sin 2\theta}{\Delta y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3t^2 + 1}{(1 + t^2)^2} dt.$$

Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3t^2 + 1}{(1 + t^2)^2} dt = 2\pi.$$

Поэтому

$$\tilde{\eta} = -\frac{4\pi\lambda^2\alpha \sin 2\theta}{\Delta y}.$$

Вводя сюда

$$\alpha = -\frac{3\mu}{\lambda} (\lambda^2 + \mu^2) \sigma,$$

получим окончательную формулу для  $\tilde{\eta}$

$$\tilde{\eta} = \frac{12\pi\lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2)\sigma \sin 2\vartheta}{\Delta y}.$$

Как и следовало ожидать, смещение  $\tilde{\eta}$  точки  $A$  не зависит от расстояния  $h$ .

Теперь можно определить угол закручивания  $\varepsilon$ . Если обозначить через  $\rho$  радиус параллели  $\gamma$ , вдоль которой располагаются области выпучивания, то

$$\varepsilon = \frac{2\tilde{\eta}}{\rho} = \frac{24\pi\lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2)\sigma \sin 2\vartheta}{\rho \Delta y}.$$

Производимая моментом  $M$  работа при выпучивании равна

$$A = M\varepsilon = \frac{24\pi\lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2)\sigma M \sin 2\vartheta}{\rho \Delta y}.$$

Найдем теперь энергию деформации  $U$ . В § 1 для энергии деформации  $\bar{U}$  на единицу длины границы выпучивания получена формула (стр. 109)

$$\bar{U} = \frac{2E\delta^2\alpha^2hk}{\sqrt{12}(1-\nu^2)}.$$

Здесь  $\alpha$  — угол между соприкасающейся плоскостью кривой  $\gamma$ , ограничивающей область выпучивания, и касательными плоскостями поверхности,  $h$  — кривизна кривой  $\gamma$ ,  $h$  — прогиб в области выпучивания.

В системе координат, которая введена выше, наша поверхность вблизи точки  $P$  задается уравнением

$$z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2).$$

Кривая  $\gamma$  задается на ней уравнениями

$$u = (\lambda + \mu) \cos \varphi, \quad v = (\lambda - \mu) \sin \varphi.$$

Переменные  $u$ ,  $v$  связаны с  $x$ ,  $y$  формулами

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}}(u \cos \vartheta - v \sin \vartheta),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{b}}(u \sin \vartheta + v \cos \vartheta).$$

Для малой области выпучивания можно считать

$$\alpha = \frac{k_n}{k},$$

где  $k$  — кривизна кривой  $\gamma$ ,  $k_n$  — нормальная кривизна исходной поверхности в направлении  $\gamma$ . Общее выражение нормальной кривизны

$$k_n = \frac{a dx^2 + b dy^2}{dx^2 + dy^2}.$$

Подставляя сюда значения

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}} [(\lambda + \mu) \cos \varphi \cos \vartheta - (\lambda - \mu) \sin \varphi \sin \vartheta],$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{b}} [(\lambda + \mu) \cos \varphi \sin \vartheta + (\lambda - \mu) \sin \varphi \cos \vartheta],$$

получим нормальную кривизну поверхности в направлении  $\gamma$ :

$$k_n = \frac{ax'^2 + by'^2}{x'^2 + y'^2},$$

где дифференцирование выполняется по переменному  $\varphi$ .

Для малой области выпучивания кривизну  $\gamma$  можно определять по ее проекции на плоскость  $xу$ . Получим

$$k = \frac{|x''y' - y''x'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

Элемент дуги кривой  $\gamma$  равен

$$ds = (x'^2 + y'^2)^{1/2} d\varphi.$$

Вычислим теперь интеграл

$$\int_{\gamma} \alpha^2 k ds = \int_0^{2\pi} \frac{(ax'^2 + by'^2)^2}{|x''y' - y''x'|} d\varphi.$$

Имеем

$$|x''y' - y''x'| = \frac{1}{\sqrt{ab}} (\lambda^2 - \mu^2).$$

$$ax'^2 + by'^2 = (\lambda + \mu)^2 \sin^2 \varphi + (\lambda - \mu)^2 \cos^2 \varphi.$$



Подставляя эти значения в подынтегральное выражение

$$\int_{\gamma} \alpha^2 k ds = \frac{2\pi \sqrt{ab}}{\lambda^2 - \mu^2} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2 \mu^2).$$

Полная энергия деформации для одной области выпучивания равна

$$U_1 = \int_{\gamma} \bar{U} ds_{\gamma} = \frac{2E\delta^2 h}{\sqrt{12}(1-\nu^2)} \frac{2\pi \sqrt{ab}}{\lambda^2 - \mu^2} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2 \mu^2).$$

Подставляя сюда

$$h = (\lambda^2 - \mu^2) \sigma,$$

получим

$$U_1 = \frac{2E\delta^2 2\pi \sqrt{ab}}{\sqrt{12}(1-\nu^2)} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2 \mu^2) \sigma.$$

Энергия деформации по всем  $n$  областям выпучивания равна

$$U = \frac{2E\delta^2 2\pi \sqrt{ab}}{\sqrt{12}(1-\nu^2)} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2 \mu^2) n \sigma.$$

Теперь из условия равновесия оболочки

$$\frac{d}{d\sigma} (U - A) = 0$$

получаем соотношение для момента  $M$ , вызывающего потерю устойчивости оболочки:

$$\frac{2E\delta^2 2\pi \sqrt{ab}}{\sqrt{12}(1-\nu^2)} (\lambda^4 + \mu^4 + 4\lambda^2 \mu^2) n - \frac{24\pi \lambda \mu (\lambda^2 - \mu^2) M \cdot \sin 2\vartheta}{\rho \Delta y} = 0.$$

Отсюда, замечая, что

$$n \Delta y = 2\pi r,$$

получим

$$\frac{\pi \rho^2 E \delta^2 \sqrt{ab}}{\sqrt{12}(1-\nu^2)} (1 + 2\varepsilon^2) - 3\varepsilon M \sin 2\vartheta = 0,$$

$$\varepsilon = \frac{\lambda \mu}{\lambda^2 + \mu^2}.$$

Наименьшее значение  $M$  получается при  $\varepsilon = 1/2$  и  $\vartheta = 45^\circ$ . Это значение определяется по формуле

$$M = \frac{\pi \rho^2 E \delta^2 \sqrt{ab}}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)}$$

$$M = \frac{\pi \rho^2 E \delta^2}{\sqrt{12} (1 - \nu^2) \sqrt{R_1 R_2}}.$$

Здесь  $R_1$  и  $R_2$  — главные радиусы кривизны вдоль параллели, где происходит выпучивание,  $\rho$  — радиус этой параллели.

В заключение заметим, что потеря устойчивости под действием крутящего момента  $M$  сопровождается образованием сильно вытянутых вмятин ( $\varepsilon = 1/2$ ), наклоненных к меридиану под углом  $\vartheta = 45^\circ$ .



## ГЛАВА ТРЕТЬЯ

### ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Среди оболочек, встречающихся в реальных конструкциях, наиболее распространенными являются оболочки, имеющие форму развертывающихся поверхностей. В значительной степени это объясняется простотой их получения из листового материала. Среди развертывающихся оболочек наиболее распространенными, пожалуй, являются цилиндрические. В связи с этим изучение прочностных свойств этих оболочек представляет большой практический интерес.

Цилиндрическая оболочка как элемент конструкции может работать в различных условиях нагружения. Среди них основными являются: осевое сжатие, внешнее давление и кручение. Обычно разрушение оболочки происходит в результате потери устойчивости. Закритические деформации, которые при этом возникают, приводят к концентрации напряжений в определенных зонах, что и ведет в конце концов к разрушению. В связи с этим возникает естественная задача об определении упругих состояний оболочки при закритических деформациях.

В настоящей главе мы исследуем закритические упругие состояния цилиндрических оболочек в основных случаях нагружения: осевое сжатие (§ 1), внешнее давление (§ 2) и кручение (§ 3). Так же как и в случае строго выпуклых оболочек (гл. 1), это исследование будет основано на принципе А. Результатом исследования будет полное описание закритического упругого состояния, в частности, определение нижних критических нагрузок.

Методы, развитые в этой главе, могут быть применены и к случаю конических оболочек. По этому поводу см. работы [10], [11] В. И. Бабенко и [12] В. В. Михайлова.

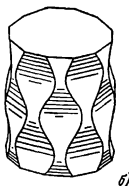
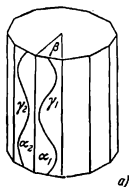
## § 1. Закритические деформации цилиндрических оболочек при осевом сжатии

Как указано выше, предлагаемое исследование закритических упругих состояний цилиндрической оболочки будет основано на использовании принципа А. Применение этого принципа предполагает исследование возможных изометрических преобразований исходной поверхности оболочки. Поэтому мы начнем наше исследование изучением этих преобразований.

1. Специальное изометрическое преобразование цилиндрической поверхности. Опыт показывает, что закритическая деформация геометрически совершенной цилиндрической оболочки при осевом сжатии обладает определенной правильностью строения. Именно, наблюдается отчетливая периодичность формы деформированной поверхности по окружности и высоте оболочки. В связи с этим мы сужаем нашу задачу и ограничиваемся рассмотрением изометрических преобразований, обладающих указанной правильностью строения.

Возьмем правильную призму с четным числом сторон ( $2n$ ) и проведем на одной из ее боковых граней  $\alpha_1$  произвольную гладкую кривую  $\gamma_1$ , однозначно проектируемую на ось призмы (рис. 29, а). Отразим кривую  $\gamma_1$  зеркально в плоскости  $\beta$ , проходящей через боковое ребро грани  $\alpha_1$  и ось призмы. При этом получится кривая  $\gamma_2$ , лежащая в боковой грани  $\alpha_2$ , смежной  $\alpha_1$ . Затем аналогично строим кривую  $\gamma_3$  в грани  $\alpha_3$ , смежной  $\alpha_2$ , и т. д. Так в каждой грани  $\alpha_i$  построим кривую  $\gamma_i$ .

Проведем теперь через кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  цилиндрическую поверхность  $Z_{12}$  с образующими, перпендикулярными плоскости  $\beta$ . Аналогично построим цилиндрические поверхности  $Z_{23}$ ,  $Z_{34}$  и т. д. Поверхности  $Z_{12}$ ,  $Z_{23}$ , ... составляют трубчатую



поверхность  $Z$ , всюду гладкую, кроме ребер  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  (рис. 29, б). Утверждается, что *построенная таким образом поверхность  $Z$  изометрична цилиндру*.

Для того, чтобы это доказать, покажем сначала, что поверхность  $Z$  локально изометрична плоскости, то есть что каждая точка этой поверхности имеет окрестность, изометричную куску плоскости. Это очевидно для точек, не лежащих на ребрах  $\gamma_i$  поверхности. Рассмотрим точки на одной из кривых  $\gamma_i$ , например,  $\gamma_2$ .

Отразим поверхность  $Z_{23}$  зеркально в плоскости грани  $\alpha_2$ . Полученная при этом поверхность  $Z_{23}^*$  является продолжением поверхности  $Z_{12}$  за край  $\gamma_2$  в виде цилиндрической поверхности. Поверхность, составленная из  $Z_{12}$  и  $Z_{23}^*$ , как цилиндрическая, вдоль кривой  $\gamma_2$  локально изометрична плоскости. Отсюда следует, что вдоль этой кривой поверхность, составленная из  $Z_{12}$  и  $Z_{23}$ , а следовательно, и  $Z$ , тоже локально изометрична плоскости.

Приведенная конструкция позволяет без труда заключить также, что замкнутая ломаная  $\bar{\gamma}$ , составленная из прямолинейных образующих поверхностей  $Z_{12}, Z_{23}, \dots$ , то есть пересечение поверхности  $Z$  с плоскостью, перпендикулярной оси призмы, является замкнутой геодезической. Двух приведенных соображений (о локальной изометрии плоскости и замкнутых геодезических) достаточно для того, чтобы заключить об изометрии поверхности  $Z$  круговому цилиндру.

Определим радиус цилиндра, изометричного поверхности  $Z$ . Для этого рассмотрим пересечение поверхности  $Z$  с плоскостью, перпендикулярной оси призмы. Как было указано, получаемая при этом замкнутая ломаная  $\bar{\gamma}$  является геодезической, и, следовательно, ее длина  $L$  связана с радиусом  $R$  цилиндра соотношением

$$L = 2\pi R.$$

Ломаная  $\bar{\gamma}$  вписана в правильный  $2n$ -угольник  $\bar{\gamma}_0$ , по которому плоскость, в которой лежит  $\bar{\gamma}$ , пересекает боковую поверхность призмы (рис. 30). Так как стороны  $\bar{\gamma}$  со сторонами многоугольника  $\bar{\gamma}_0$  образуют равные углы  $(\pi/2n)$ , то независимо от формы ломаная  $\bar{\gamma}$  имеет всегда один и тот же периметр  $L$ , равный периметру правильного  $2n$ -угольника

с вершинами в серединах сторон многоугольника  $\bar{\gamma}_0$ . Теперь не составляет труда найти периметр ломаной  $\bar{\gamma}$ , а следовательно, и радиус  $R$  цилиндра, изометричного поверхности  $Z$ .

Приведенное соображение позволяет сделать важный вывод. Именно, радиус цилиндра, изометричного  $Z$ , не зависит от того, какова была взята кривая  $\gamma$  на грани призмы  $\alpha_1$  при построении поверхности  $Z$ .

Проведем через ось призмы и одно из ее боковых ребер плоскость. Она пересечет поверхность  $Z$  по некоторой кривой  $\tilde{\gamma}$ . На поверхности кругового цилиндра, которому изометрична поверхность  $Z$ , кривой  $\tilde{\gamma}$  по изометрии соответствует прямолинейная образующая. Следовательно, *длина кривой  $\tilde{\gamma}$  равна высоте цилиндра, изометричного  $Z$ , и не зависит от того, через какое из боковых ребер проведена секущая плоскость, определяющая кривую  $\tilde{\gamma}$ .*

Предположим теперь, что кривая  $\gamma_1$  на боковой грани  $\alpha_1$ , с помощью которой описанной выше конструкцией получается поверхность  $Z$ , произвольным образом деформируется, но так, что длина кривой  $\tilde{\gamma}$  сохраняется.

При этом поверхность  $Z$  также деформируется. И так как радиус и высота цилиндра, изометричного  $Z$ , не изменяется, то *эта деформация есть геометрическое изгибание*. С помощью такого изгибания мы будем приближать упругую деформацию цилиндрической оболочки в закритической стадии.

В связи с применением принципа А к исследованию закритических упругих состояний цилиндрических оболочек при осевом сжатии нам предстоит рассматривать функционал

$$W = U - A$$

на множестве всех изометрических преобразований цилиндрической поверхности, обладающих периодичностью строения. Если в качестве кривой  $\gamma$ , с помощью которой строится описанным выше способом поверхность  $Z$ , взять периодическую

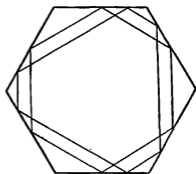


Рис. 30.

кривую, то поверхность  $Z$  будет обладать такой периодичностью. Но возникает вопрос, всякая ли изометричная цилиндру поверхность, обладающая периодичностью строения, может быть построена таким способом. Покажем, что это действительно так.

Пусть некоторая поверхность  $Z$  обладает периодичностью строения по высоте и в окружном направлении. Требуется показать, что она получается описанной выше конструкцией. Сохраняя преемственность обозначений, назовем  $\beta$  одну из радиальных плоскостей симметрии поверхности  $Z$  (рис. 31).

Эта плоскость пересекает поверхность по некоторой кривой  $\tilde{\gamma}$ .

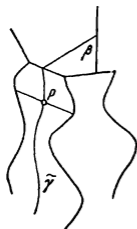


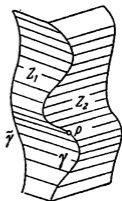
Рис. 31.

Пусть  $P$  — произвольная точка на этой кривой. Так как поверхность  $Z$  развертываемая, то через каждую ее точку, в частности через точку  $P$ , проходит прямолинейная образующая  $g(P)$ . Если предположить для простоты, что поверхность  $Z$  не содержит плоских кусков, то прямолинейная образующая  $g(P)$ , проходящая через точку  $P$ , будет единственной.

В силу симметрии поверхности  $Z$  относительно плоскости  $\beta$ , прямолинейная образующая  $g(P)$ , будучи единственной, лежит либо в плоскости  $\beta$ , либо перпендикулярна этой плоскости. Первая возможность исключается, так как в противном случае переход цилиндрической поверхности в поверхность  $Z$  не сопровождается осевым сжатием. Таким образом, прямолинейные образующие поверхности в точках линии  $\tilde{\gamma}$  должны быть перпендикулярны плоскости  $\beta$ , и, следовательно, параллельны друг другу. А это значит, что поверхность  $Z$  вблизи линии  $\tilde{\gamma}$  должна быть цилиндрической поверхностью, с образующими, перпендикулярными плоскости симметрии  $\beta$ . Такое же строение имеет поверхность  $Z$  с противоположной стороны вблизи линии  $\tilde{\gamma}_1$ .

Так как поверхность  $Z$  имеет  $n$  плоскостей симметрии, то она должна состоять из  $2n$  цилиндрических поверхностей, с образующими, перпендикулярными этим плоскостям. Будучи

так устроена, поверхность  $Z$  должна иметь особые линии — ребра. Пусть  $\gamma$  — одно из таких ребер, и  $Z_1, Z_2$  — цилиндрические поверхности, которые пересекаются по этому ребру (рис. 32). Так как поверхность  $Z$  локально изометрична плоскости, то поверхности  $Z_1$  и  $Z_2$  не могут быть совершенно произвольными. Установим связь между ними.



Пусть  $\tilde{\gamma}$  — пересечение поверхности  $Z_1$  с плоскостью симметрии  $Z$ , перпендикулярной ее образующим. Кривая  $\tilde{\gamma}$  является геодезической линией. Будем характеризовать положение произвольной точки  $P$  кривой  $\gamma$  расстоянием  $u(s)$  этой точки от  $\tilde{\gamma}$  по образующей ( $s$  — дуга вдоль  $\tilde{\gamma}$ , рис. 31). Так как поверхность  $Z$  локально изометрична плоскости, то сумма геодезических кривизн линии  $\gamma$  на поверхностях  $Z_1$  и  $Z_2$  должна быть равна нулю. При заданной поверхности  $Z_1$  и направлении образующих поверхности  $Z_2$  это условие дает некоторое дифференциальное уравнение второго порядка для функции  $u(s)$ :

$$u'' = \varphi(u', s). \quad (*)$$

Из единственности решения этого уравнения следует, что кривая  $\gamma$  определяется однозначно (на поверхности  $Z_1$ ), если задана какая-нибудь ее точка и направление в ней.

Ввиду периодичности строения поверхности  $Z$  по высоте, на линии  $\gamma$  найдется такая точка  $P_0$ , в которой касательная к ней параллельна оси поверхности (осью мы называем прямую, по которой пересекаются плоскости симметрии). Проведем через точку  $P_0$  плоскость  $\alpha$ , параллельную оси поверхности, так, чтобы образующие поверхностей  $Z_1$  и  $Z_2$ , исходящие из точки  $P_0$ , составляли равные углы с плоскостью  $\alpha$  и располагались по одну ее сторону. Пусть  $\gamma'$  — кривая, по которой плоскость  $\alpha$  пересекает поверхность  $Z_1$  и ее продолжение за кривую  $\gamma$ . Кривая  $\gamma'$  удовлетворяет уравнению (\*). Соответствующая поверхность  $Z_2'$  строится зеркальным отражением в плоскости  $\alpha$  той части поверхности  $Z_1$  и ее продолжения, которая находится за кривой  $\gamma'$ . Так как кривые  $\gamma$  и  $\gamma'$  имеют



общую точку ( $P_0$ ) и направление в ней, то они совпадают. Отсюда следует, что поверхность  $Z$  получается описанной выше конструкцией. Плоскость  $\alpha$  является одной из граней призмы.

В связи с вычислением функционала

$$W = U - A$$

на изометрических преобразованиях исходной поверхности оболочки, определим некоторые величины для построенной, изометричной цилиндру, поверхности  $Z$ .

Обозначим  $\alpha$  одну из граней призмы, в которую вписана поверхность  $Z$ . Ребро этой поверхности, лежащее в грани  $\alpha$ , обозначим  $\gamma$ . Проведем через ось призмы и боковое ребро грани  $\alpha$  плоскость  $\beta$ , и пересечение ее с поверхностью  $Z$  обозначим  $\tilde{\gamma}$ . Кривая  $\tilde{\gamma}$  представляет собой нормальное сечение поверхности  $Z$ , перпендикулярное образующим.

Введем в плоскости грани  $\alpha$  прямоугольную декартову систему координат  $x, y$ , приняв за ось  $x$  прямую, параллельную боковым ребрам грани и проходящую посередине между ними, а за ось  $y$  — прямую, перпендикулярную оси  $x$ . Пусть в этих координатах ребро  $\gamma$  поверхности  $Z$  задается уравнением

$$y = y(x).$$

В плоскости  $\beta$  также введем прямоугольную декартову систему координат, приняв за оси  $x$  и  $y$  проекции осей координат, введенных в плоскости  $\alpha$ . В этих координатах нормальное сечение  $\tilde{\gamma}$  поверхности  $Z$  задается уравнением

$$y = \tilde{y}(x) = \sin \frac{\pi}{2n} y(x).$$

Мы будем предполагать  $n$  достаточно большим, и поэтому можно считать, что

$$\tilde{y}(x) \simeq \frac{\pi}{2n} y(x).$$

По известной формуле кривизна ребра  $\gamma$  поверхности  $Z$  равна

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Нормальная кривизна поверхности  $Z$  в сечении, перпендикулярном образующим, будет

$$\tilde{k} = \frac{\tilde{y}''}{(1 + \tilde{y}'^2)^{3/2}}.$$

Предполагая  $n$  большим, мы опустим член  $\tilde{y}'^2$  в знаменателе этой формулы. Тогда получим

$$\tilde{k} = \tilde{y}''.$$

Или, вводя вместо  $\tilde{y}$  функцию  $y$ ,

$$\tilde{k} = \frac{\pi}{2n} y''.$$

Определим угол  $\vartheta$ , который образует плоскость ребра  $\gamma$  поверхности  $Z$  с касательными плоскостями. С этой целью систему координат  $xu$  в плоскости  $\beta$  дополним до пространственной системы координат  $xuz$ . В такой системе координат угловые коэффициенты плоскости ребра  $\gamma$ , то есть плоскости  $\alpha$ , будут  $0, 1, -\pi/2n$ , угловые коэффициенты касательной плоскости поверхности будут  $\pi y'/2n, 1, 0$ . Угол между плоскостями равен углу между векторами  $(0, 1, -\frac{\pi}{2n})$ ,  $(\frac{\pi y'}{2n}, 1, 0)$ . Отсюда для угла  $\vartheta$  при большом  $n$  получается следующее значение:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2n} \sqrt{1 + y'^2}$$

Найдем осевое сжатие при изометрическом преобразовании кругового цилиндра в поверхность  $Z$ . Возьмем на цилиндре область  $G$ , расположенную между двумя сечениями, перпендикулярными оси и отстоящими друг от друга на расстоянии  $b$ . Изометричная ей область  $Z_G$  на поверхности  $Z$  ограничена двумя плоскостями, перпендикулярными оси призмы и отстоящими друг от друга на некотором расстоянии  $b'$ . Осевое сжатие, о котором идет речь, есть разность  $b - b' = \Delta b$ .

Высота  $b$  пояса  $G$  на цилиндре, как показано выше, равна длине кривой  $\tilde{\gamma}$  на поверхности  $Z_G$ . Следовательно,

$$b = \int \sqrt{1 + \tilde{y}'^2} dx,$$

где интегрирование выполняется по высоте пояса  $Z_0$  поверхности  $Z$ , и

$$\int dx = b'.$$

Предполагая, как и раньше,  $\tilde{y}'^2$  малым,

$$b \simeq \int \left( 1 + \frac{\tilde{y}'^2}{2} \right) dx = b' + \frac{\pi^2}{8n^2} \int y'^2 dx.$$

Отсюда

$$\Delta b \simeq \frac{\pi^2}{8n^2} \int y'^2 dx.$$

Предположим теперь, что функция  $y(x)$ , задающая кривую  $\gamma$ , периодическая и четная. Пусть  $m$  — число полных волн кривой  $\gamma$ . Проведем через вершины кривой  $\gamma$  плоскости, перпендикулярные оси призмы, и назовем их горизонтальными сечениями. Кроме того, проведем полуплоскости через ось призмы и ее боковые ребра — радиальные сечения. Эти плоскости разбивают поверхность  $Z$  на  $4mn$  равных областей  $Q$ , каждая из которых изометрична прямоугольнику (рис. 33).

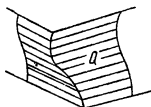


Рис. 33.

Определим стороны этого прямоугольника в зависимости от параметров цилиндра, изометричного  $Z$ , то есть радиуса основания, высоты, чисел  $m$  и  $n$ .

Если высота цилиндра  $L$ , то, очевидно, высота прямоугольника  $Q$  равна

$$b = \frac{L}{2m}.$$

Если радиус цилиндра  $R$ , то ширина прямоугольника  $Q$  равна

$$a = \frac{\pi R}{n}.$$

По изометрии разбиению поверхности  $Z$  на области  $Q$  соответствует разбиение цилиндра, изометричного  $Z$ , на  $4mn$  прямоугольных областей плоскостями, перпендикулярными оси, отстоящими друг от друга на расстоянии  $b$ , и радиальными полуплоскостями, делящими полный угол при оси цилиндра на  $2n$  равных частей.

2. Энергия деформации оболочки. Исследование закритических деформаций при осевом сжатии. Согласно принципу А, нахождение закритических упругих состояний оболочки сводится к рассмотрению вариационной задачи для функционала  $W = U - A$ , который определяется на изометрических преобразованиях исходной формы оболочки. Как показано в п. 1, класс изометрических преобразований, на которых следует рассматривать функционал  $W$  в случае осевого сжатия цилиндрических оболочек, сужается до поверхностей типа  $Z$ . В связи с этим мы определим энергию деформации  $U$  на поверхностях этого типа.

В п. 1 мы разбили поверхность  $Z$  на  $4m$  конгруэнтных областей  $Q$ , правильно расположенных в  $2m$  поясах по  $2n$  областей в каждом поясе. Области  $Q$  изометричны прямоугольнику с основанием  $a = \pi R/n$ , высотой  $b = L/2m$  и составлены из двух цилиндрических поверхностей, примыкающих по ребру  $\gamma$ . Для того чтобы найти энергию деформации всей оболочки, достаточно найти ее в одной области и результат умножить на  $4m$ .

Энергия деформации в области  $Q$  состоит из двух частей:  $U_Q$  — энергии деформации по основной поверхности и  $U_\gamma$  — энергии деформации вдоль ребра. Энергия  $U_Q$  определяется изгибом исходной цилиндрической формы в форму  $Z$  всюду, кроме ребра  $\gamma$ . На единицу площади поверхности она определяется по формуле

$$\bar{U}_Q = \frac{D}{2} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2).$$

Здесь  $\Delta k_1$  и  $\Delta k_2$  — главные изменения нормальных кривизн при указанной деформации поверхности, а  $D$  — жесткость оболочки на изгиб, то есть

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)},$$

где  $\delta$  — толщина оболочки,  $E$  — модуль упругости, а  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Для нормальных кривизн  $k_1$  и  $k_2$  исходной цилиндрической поверхности имеем

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{1}{R}.$$

По соответствующим направлениям нормальные кривизны поверхности  $Z$  равны

$$k_1 = \pm \frac{\pi}{2n} y'', \quad k_2 = 0.$$

(Нормальные кривизны в смежных радиальных нормальных сечениях поверхности, образующих угол  $\pi/n$ , равны по величине, но противоположны по знаку. Этим объясняется двузначность в выражении  $k_1$ .) Таким образом, при рассматриваемой деформации поверхности будет

$$\Delta k_1 = \pm \frac{\pi}{2n} y'', \quad \Delta k_2 = -\frac{1}{R}.$$

Отсюда

$$U_Q = \frac{D}{2} \int \int_{(Q)} \left\{ \left( \frac{\pi y''}{2n} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \pm 2\nu \left( \frac{\pi y''}{2n} \right) \frac{1}{R} \right\} dx dy.$$

Выполняя интегрирование по  $y$ , получим

$$U_Q = \frac{Da}{2} \int_{(b)} \left( \frac{\pi y''}{2n} \right)^2 dx + \nu D \int_{(b)} \frac{\pi}{2nR} y'' (a' - a'') dx + \text{const},$$

где  $a'$  и  $a''$  — длины отрезков образующих поверхности  $Z$  в области  $Q$ , разделяемые ребром  $\gamma$ . При большом  $n$

$$a' \simeq \frac{a}{2} - y, \quad a'' \simeq \frac{a}{2} + y.$$

Поэтому

$$\int_{(b)} y'' (a' - a'') dx = -2 \int_{(b)} y y'' dx.$$

Выполняя интегрирование по частям и замечая, что  $y'$  на концах интервала интегрирования  $(b)$  равно нулю, получим

$$\int_{(b)} y'' (a' - a'') dx = 2 \int_{(b)} y'^2 dx.$$

Следовательно,

$$U_Q = \frac{D\pi^2 a}{8n^2} \int_{(b)} y''^2 dx + \frac{\nu D\pi}{nR} \int_{(b)} y'^2 dx + \text{const}.$$

Энергия деформации  $U_\gamma$  вдоль ребра  $\gamma$  определяется по формуле

$$U_\gamma = U_\gamma^0 + \Delta U_\gamma,$$

$$U_\gamma^0 = \int_\gamma c E \delta^{3/2} \alpha^{3/2} k^{1/2} ds,$$

$$\Delta U_\gamma = \frac{E \delta^3}{6(1-\nu^2)} \int_\gamma \alpha \left( -k_n + \frac{k_i + k_e}{2} \right) ds.$$

Здесь  $k$  — кривизна кривой  $\gamma$ ,  $\alpha$  — угол между плоскостью ребра  $\gamma$  и касательными плоскостями поверхности  $Z$  вдоль ребра;  $k_i$  и  $k_e$  — нормальные кривизны поверхности  $Z$  в направлении, перпендикулярном ребру,  $k_n$  — нормальная кривизна исходной поверхности в соответствующем направлении. Интегрирование выполняется по дуге  $s$  кривой  $\gamma$ .

Найдем значение  $\Delta U_\gamma$ . Нормальные кривизны  $k_i$  и  $k_e$  равны по величине и противоположны по знаку. Поэтому

$$k_i + k_e = 0$$

и, следовательно,

$$\Delta U_\gamma = - \frac{E \delta^3}{6(1-\nu^2)} \int_\gamma \alpha k_n ds.$$

Угол

$$\alpha = \frac{\pi}{2n} (1 + y'^2)^{1/2}.$$

По формуле Эйлера нормальная кривизна

$$k_n = \frac{1}{R} \sin^2 \vartheta,$$

где  $\vartheta$  — угол, который составляет прямолинейная образующая исходной цилиндрической поверхности с направлением кривой, соответствующей по изометрии  $\gamma$ , т. е.

$$\cos \vartheta = \frac{1}{(1 + y'^2)^{1/2}}.$$

Наконец, элемент дуги кривой  $\gamma$  равен

$$ds = (1 + y'^2)^{1/2} dx.$$

Подставляя значения  $\alpha$ ,  $k_n$  и  $ds$  в формулу для  $\Delta U_\gamma$ , получим

$$\Delta U_\gamma = -\frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\pi}{nR} b.$$

Вычислим  $U_\gamma^0$ . Принимая во внимание выражения для  $\alpha$ ,  $ds$  и

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}},$$

получим

$$U_\gamma^0 = cE\delta^{3/2} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{1/2} \int_{(b)} |y''|^{1/2} (1+y'^2) dx.$$

Полная энергия деформации  $U_1$  по области  $Q$  получается сложением величин  $U_Q$ ,  $U_\gamma^0$  и  $\Delta U_\gamma$ :

$$U_1 = \frac{D\pi^2 a}{8n^2} \int_{(b)} y'^2 dx + \frac{\nu D\pi}{nR} \int_{(b)} y'^2 dx + \\ + cE\delta^{3/2} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{1/2} \int_{(b)} |y''|^{1/2} (1+y'^2) dx + \text{const.}$$

Области  $Q$ , расположенные между двумя плоскостями, проходящими через смежные вершины ребра  $\gamma$  перпендикулярно оси призмы, образуют кольцевой пояс высотой  $b$ . В дальнейшем нам будет удобно рассматривать не всю оболочку, а этот пояс. Энергия деформации  $U$  оболочки внутри указанного пояса получается умножением энергии деформации в области  $Q$  на  $2n$  — число областей внутри пояса, то есть

$$U = \frac{D\pi^2 a}{4n} \int_{(b)} y'^2 dx + \frac{2\nu D\pi}{R} \int_{(b)} y'^2 dx + \\ + 2cnE\delta^{3/2} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{1/2} \int_{(b)} |y''|^{1/2} (1+y'^2) dx + \text{const.}$$

Найдем производимую внешней нагрузкой работу при осевом сжатии оболочки под нагрузкой  $p$ . Осевое сжатие рассматриваемого пояса равно

$$\Delta b = \frac{\pi^2}{8n^2} \int_{(b)} y'^2 dx,$$

Отсюда работа

$$A = 2\pi R \delta p \frac{\pi^2}{8n^2} \int_{(b)} y'^2 dx.$$

В выражение энергии деформации оболочки  $U$  и работы  $A$ , производимой осевым сжатием, входят целочисленные параметры  $m$  и  $n$ , характеризующие периодичность строения поверхности  $Z$ . Для того чтобы определить эти параметры, мы предположим, что характер периодичности прогибов оболочки сохраняется в течение всего времени закритической деформации и, следовательно, он остается таким же, как и в момент потери устойчивости.

В линейной теории оболочек доказывается, что нормальный прогиб  $w$  цилиндрической оболочки радиуса  $R$  в момент потери устойчивости удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{D}{\delta} \Delta \Delta \Delta \Delta w + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p \Delta \Delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (*)$$

Здесь  $x$  и  $y$  — криволинейные координаты:  $x$  — по образующей,  $y$  — по круговому сечению, перпендикулярному оси;  $D$  — жесткость оболочки на изгиб,  $p$  — критическая нагрузка, а

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

— оператор Лапласа. Анализируя это уравнение, приходят к выводу о том, что прогиб оболочки в момент потери устойчивости при условии шарнирного опирания по краям имеет вид

$$w = c \sin \frac{2\pi m x}{L} \sin \frac{n y}{R}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (\*), получим связь между параметрами волнообразования  $m$ ,  $n$  и критической нагрузкой  $p$ :

$$\begin{aligned} \frac{D}{\delta} \left( \frac{4\pi^2 m^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^4 + \\ + \frac{E}{R^2} \left( \frac{2\pi m}{L} \right)^4 - p \left( \frac{4\pi^2 m^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^2 \left( \frac{2\pi m}{L} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$



Введем вместо  $m$  и  $n$  параметры  $\xi$  и  $\eta$

$$\xi = \frac{Ln}{2\pi Rm}, \quad \eta = \frac{n^2\delta}{R}.$$

Тогда, полагая

$$p = \bar{p}E \frac{\delta}{R},$$

будем иметь

$$\bar{p} = \frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{(1+\xi^2)^2}{\xi^2} \eta + \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2 \eta}.$$

Наименьшее значение  $\bar{p}$  отвечает верхней критической нагрузке. Оно получается, если параметры  $\xi$  и  $\eta$  связаны соотношением

$$\frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2 \eta} = \frac{1}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}. \quad (**)$$

Тогда

$$\bar{p}_e = \min \bar{p} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \simeq 0,6.$$

Соотношение (\*\*) не определяет  $\xi$  и  $\eta$ , а следовательно,  $m$  и  $n$  однозначно. Однако, как показывает опыт, оболочка теряет устойчивость таким образом, что значение  $\xi \simeq 1$ . Если для  $\xi$  принять это значение, то соотношение (\*\*) определяет  $\eta$ , а значит,  $m$  и  $n$ . В частности, для  $n$  получается следующая формула:

$$n = \frac{1}{2} \sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{\delta}}.$$

При  $\nu = 0,3$

$$n \simeq 0,91 \sqrt{\frac{R}{\delta}}$$

Предположив, что периодичность прогибов оболочки сохраняется при закритической деформации, и, следовательно, она такая же, как и в момент потери устойчивости, мы должны считать, что размеры  $a$ ,  $b$  области  $Q$  оболочки одинаковы, так как

$$\frac{a}{b} = \xi = 1,$$

а параметр  $n$  определяется по указанной выше формуле.

Истинная форма оболочки при закритической деформации, сопровождающейся осевым сжатием  $\Delta b$ , определяется из усло-

вия минимума функционала  $U(y)$  в классе функций  $y(x)$ , удовлетворяющих условию

$$\Delta b = \frac{\pi^2}{8n^2} \int_{(b)} y'^2 dx.$$

Для решения этой вариационной задачи представляется целесообразным перейти к безразмерным переменным  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ , полагая

$$x = \frac{b}{2} \bar{x}, \quad y = \frac{2n}{\pi} \sqrt{bh} \bar{y},$$

где  $h$  обозначает осевое сжатие оболочки (т. е.  $h = \Delta b$ ). В новых переменных  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ , черту над которыми мы для простоты записи опускаем, будет

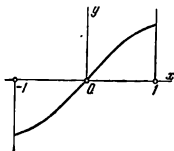
$$U = \frac{2E\delta^3 a n h}{3(1-\nu^2)b^2} \int_{-1}^1 y''^2 dx + \frac{4\nu E\delta^3 h n^2}{3\pi(1-\nu^2)R} +$$

$$+ 2ncE\delta^{3/2} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 (bh)^{1/4} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} \left(1 + \frac{16n^2 h}{\pi^2 b} y'^2\right) dx + \text{const.}$$

Тогда определение формы оболочки при закритической деформации сводится к нахождению функции  $y(x)$ , реализующей минимум функционала  $J(y)$  при условии

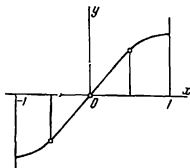
$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = 1.$$

Относительно функции  $y(x)$ , для которой функционал  $J$  достигает минимума, существенно заметить, что график этой функции имеет точку перегиба при  $x = 0$ , а в точках  $x = \pm 1$  кривизна



стационарна (рис. 34). Поэтому представляется естественным аппроксимировать этот график двумя параболой с вершинами на прямых  $x = \pm 1$ , расположенными симметрично относительно начала координат, и гладко примыкающим к ним

прямолинейным отрезком (рис. 35). Функцию  $y(x)$ , задаваемую этим графиком, мы будем характеризовать двумя параметрами  $k$  и  $l$ . Величина  $k$  — это угловой коэффициент наклонных участков графика  $y'(x)$ , а  $l$  — значение  $y'(x)$  в нуле. Таким образом,  $k = |y''|$  при  $x = \pm 1$ , а  $l = y'(0)$ .



Несложным рассмотрением показывается, что область допустимых значений параметра  $l$ , определяемая условием

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = 1,$$

будет

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq l \leq \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Так же показывается, что значения  $\lambda$ , характеризующие общую деформацию оболочки, ограничены, именно

$$\lambda < \frac{4}{3},$$

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = 1.$$

Положим теперь

$$\frac{b}{a} = \xi, \quad h = \frac{1}{2} \left( \frac{a\pi}{2n} \right)^2 \frac{\lambda}{b}.$$

Тогда получим

$$U = \frac{\pi^2 E \delta^3 \lambda}{12(1-\nu^2) n \xi^3} \int_{-1}^1 y'^2 dx + \frac{\pi^2 \nu E \delta^3 \lambda}{6(1-\nu^2) n \xi} +$$

$$+ 2^{1/4} c \pi^3 \frac{1}{4n^2} E \delta^{1/2} R^{1/2} \lambda^{1/4} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} \left( 1 + \frac{2\lambda}{\xi^2} y'^2 \right) dx + \text{const.}$$

Как показано выше, в момент потери устойчивости оболочки имеем

$$\xi = 1, \quad n = 0,91 \sqrt{\frac{R}{\delta}}.$$

Подставляя эти значения в выражение энергии деформации, получим

$$U = \frac{\pi^2 E \delta^3}{12(1-\nu^2)n} \left( \lambda \int_{-1}^1 y'^2 dx + 0,6\lambda + 2\lambda^{1/4} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} (1 + 2\lambda y'^2) dx \right) + \text{const.}$$

Здесь принято  $\nu = 0,3$ ,  $c = 0,19$ .

Положим

$$J(y) = \lambda \int_{-1}^1 y'^2 dx + 0,6\lambda + 2\lambda^{1/4} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} (1 + 2\lambda y'^2) dx.$$

Для функции  $y(x)$  указанного вида имеем

$$J = 2kl\lambda + \frac{4l}{\sqrt{k}} \lambda^{1/4} + \frac{8l^3}{3\sqrt{k}} \lambda^{3/4} + 0,6\lambda,$$

а условие

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = 1$$

переходит в связь между  $k$  и  $l$

$$\frac{1}{k} = \frac{3}{2l} - \frac{3}{4l^3}.$$

Для определения минимума  $J$  и значений  $k$ ,  $l$ , при которых этот минимум достигается, были вычислены значения  $J$  для различных  $l$  из указанного выше интервала

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq l \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$$

и значений  $\lambda$ , не превосходящих  $1/3$ . При этом оказалось, что  $\min J$  при  $\lambda = \text{const}$  практически всегда получается при одном и том же значении  $l \simeq 0,82$ . А так как значение  $J$  в точке, где достигается минимум, стационарно, то, не совершая большой ошибки, можно принять, что минимум  $J$  равен его значению при  $l = 0,82$ . Тогда получим

$$\min J = 4,1\lambda + 2,24\lambda^{1/4} + \lambda^{3/4}.$$

Следовательно, энергия упругой деформации оболочек в состоянии равновесия равна

$$U = \frac{\pi^2 E \delta^3}{12(1-\nu^2)n} (4,1\lambda + 2,24\lambda^{1/4} + \lambda^{3/4}) + \text{const.}$$

Обратимся теперь к работе  $A$ , производимой внешней нагрузкой  $p$ . Имеем

$$A = 2\pi R \delta p h.$$

Вводя сюда вместо  $h$  параметр  $\lambda$  согласно равенству

$$h = \frac{1}{2} \left( \frac{a\pi}{2n} \right)^2 \frac{\lambda}{b},$$

и замечая, что

$$\frac{b}{a} = \xi = 1, \quad a = \frac{\pi R}{n}, \quad n = 0,91 \sqrt{\frac{R}{\delta}}, \quad p = \bar{p} E \frac{\delta}{R},$$

будем иметь

$$A = \frac{\pi^4}{3,3\pi} E \delta^3 \bar{p} \lambda.$$

Для оболочки, находящейся в состоянии упругого равновесия, имеем

$$d(U - A) = 0.$$

Отсюда получается величина безразмерной нагрузки  $\bar{p}$  в зависимости от параметра  $\lambda$ , характеризующего осевое сжатие

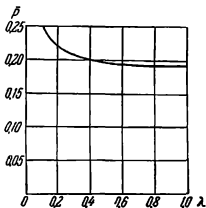


Рис. 36.

$$\bar{p} = 0,03 \times$$

$$\times (4,1 + 0,56\lambda^{-1/4} + 1,25\lambda^{1/4}).$$

Напомним, что здесь, как и везде в аналогичных случаях, параметр  $\lambda$  нельзя брать сколь угодно малым, так как он характеризует деформацию, которая предполагается значительной.

Графически зависимость  $\bar{p}$  от  $\lambda$  представлена на рис. 36.

Мы видим, что воспринимаемая оболочкой нагрузка после потери устойчивости падает. Наименьшее значение  $\bar{p} \approx 0,18$ .

Таким образом, нижняя критическая нагрузка  $p$  для цилиндрической оболочки при осевом сжатии

определяется по формуле

$$p = 0,18E \frac{\delta}{R}.$$

Полученная формула для  $p$  была подвергнута экспериментальной проверке. Экспериментальное определение критических нагрузок при осевом сжатии цилиндрической оболочки производилось на установке, которая схематически изображена на рис. 37. Основным элементом установки являются два строго параллельных диска 1, которые при затягивании гайки 2, выполненной в виде штурвала, сближаются и сжимают испытываемую оболочку 3.

Нижний диск имеет втулку, в которой проходит стержень верхнего диска. Оба диска после сочленения втулки и стержня по скользящей посадке обработаны с одной установки, чем и достигнута строгая параллельность их друг другу.

Испытуемые оболочки радиуса  $R = 40$  мм, длины  $L = 80$  мм получались из меди напылением в вакууме на геометрически совершенную полированную цилиндрическую поверхность. Края оболочки обрезались на специальной оправке также с одной установки станка.

Для того чтобы обеспечить полную равномерность распределения сжимающего усилия по краю оболочки, между опорными дисками 1—1 и торцами оболочки поставлена тонкая эластичная прокладка 4. Края оболочки центрировались на конических шайбах 8.

Сжимающее усилие регистрировалось с помощью тензометрических датчиков, установленных на кольце 5, через которое передавалось усилие от винта 6 на стержень верхнего опорного диска 1. Тензометрические датчики тарировались на величину сжимающего усилия с помощью съемного груза 7.

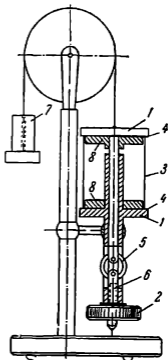
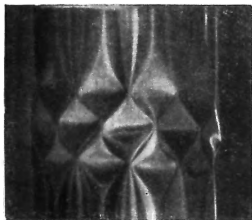


Рис. 37.

Эксперимент проводился следующим образом. Испытуемый образец устанавливался между опорными дисками 1—1. С помощью съемного груза 7 тарировались показания тензометрических датчиков на величину сжимающего усилия. Затем вращением штурвала 2 оболочка сжималась. Сжимающее усилие регистрировалось показанием гальванометра, подключенного к тензометрическим датчикам. Когда сжимающее усилие достигало верхнего критического значения  $f_e$ , оболочка теряла устойчивость с образованием системы правильно расположенных вмятин на ее поверхности (рис. 38).



В результате потери устойчивости воспринимаемая оболочкой нагрузка снижалась и продолжала снижаться при дальнейшем сближении опорных дисков. В конце концов она достигала минимального значения  $f_l$  (нижнее критическое значение).

Испытанию подвергались цилиндрические оболочки радиуса  $R=40$  мм, высоты  $L=80$  мм с различной толщиной  $\delta$  от 0,03 до 0,09 мм. На рис. 39 представлены графики теоретической зависимости величин  $f_e$  и  $f_l$  от толщины оболочки

$$f_e = 0,6E \frac{\delta}{R} (2\pi R\delta), \quad f_l = 0,18E \frac{\delta}{R} (2\pi R\delta).$$

Модуль упругости  $E$  для меди принят равным  $0,9 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>. (Это среднее значение модуля упругости для медных образцов, получаемых напылением в вакууме.) Отдельные точки, обозначенные кружками, дают экспериментальное значение величины  $f_e$ . Как видно, эти значения близки к теоретическим. Следует, однако, заметить, что близость экспериментального значения  $f_e$  к теоретическому была получена только после тщательной отладки установки и подготовки образцов, обе-

сплечающих равномерность распределения сжимающего усилия по краю оболочки.

Экспериментальное исследование величины верхнего критического усилия  $f_e$  дает основание утверждать, что в реальной конструкции теоретическое значение  $f_e$  практически никогда не достигается, и на это значение критического усилия нельзя ориентироваться при расчете оболочек на устойчивость.

Экспериментальные значения нижнего критического значения на рис. 39 отмечены темными кружочками. Нижнее критическое значение  $f_l$  отличалось значительной стабильностью. Его экспериментальное значение было близко к теоретическому во всех случаях, в

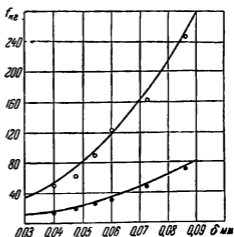


Рис 39.

том числе и тогда, когда верхнее критическое значение  $f_e$  было гораздо ниже теоретического. Кроме того, значение  $f_l$  практически не изменялось при повторных испытаниях, чего нельзя сказать о верхнем критическом значении.

Сопоставление экспериментального значения  $f_l$  с его теоретическим значением дает основание рекомендовать в качестве расчетного значения для критической нагрузки  $p$  сжатой цилиндрической оболочки полученную выше формулу

$$p = 0,18E \frac{\delta}{R}.$$

**3. Влияние начальной погни на устойчивость. Ограниченно упругие оболочки.** Все наши предыдущие рассмотрения относились к неограниченно упругим, геометрически совершенным оболочкам. Реальная оболочка является ограниченно упругой, и ее форма далеко не совершенна. Оба эти обстоятельства могут повлиять на результаты, полученные в предыдущем пункте, в частности, на величину критических нагрузок. Поскольку верхняя критическая нагрузка



определяется из рассмотрения сравнительно малых деформаций поверхности, неблагоприятная начальная погибь может значительно изменить ее. Нижняя критическая нагрузка, будучи связана с большими деформациями оболочки, менее чувствительна к начальной погиби, но ограниченная упругость материала может повлиять на нее существенным образом. Сейчас мы рассмотрим влияние начальной погиби оболочки на верхнюю критическую нагрузку и влияние ограниченной упругости материала на нижнюю критическую нагрузку.

Очевидно, влияние начальной погиби на устойчивость оболочки будет наибольшим при заданной величине погиби  $\epsilon$ , если эта погибь воспроизводит форму оболочки при закритической деформации. Естественно считать, что критическая нагрузка, при которой оболочка с погибью теряет устойчивость, снижается до значения воспринимаемой оболочкой нагрузки при соответствующей закритической деформации.

Воспринимаемая оболочкой нагрузка  $p$  при закритической деформации определяется по формуле (п. 2)

$$\bar{p} = 0,03 (4,1 + 0,56\lambda^{-3/4} + 1,25\lambda^{1/4}),$$

где  $\lambda$  — параметр, характеризующий деформацию (осевое сжатие). Установим связь между осевым сжатием ( $\lambda$ ) и максимальным нормальным прогибом, который будем обозначать  $\epsilon$ . Как показывает расчет, приведенный в п. 2, кривая  $y(x)$ , задающая форму поверхности оболочки при закритической деформации, определяется одними и теми же параметрами  $l$  и  $k$  ( $l \approx 0,82$ ). Отсюда следует, что в исходных переменных  $x, y$  будет

$$\frac{1}{y_{\max}^2} \int_{(b)} y'^2 dx = \text{const},$$

то есть слева стоящая величина не зависит от величины деформации. Если в этом соотношении перейти к переменным  $\bar{x}, \bar{y}$ , как это сделано в предыдущем пункте, положи

$$x = \frac{b}{2} \bar{x}, \quad y = \frac{2n}{\pi} \sqrt{b\bar{h}} \bar{y},$$

то получим

$$\frac{1}{y_{\max}^2} \int_{(b)} y'^2 dx = \frac{2}{by_{\max}^2} \int_{-1}^1 \bar{y}'^2 d\bar{x}.$$

Для функции  $\bar{y}(\bar{x})$ , определяемой параметрами  $k$  и  $l$  (п. 2), имеем

$$\bar{y}_{\max} \simeq 0,65, \quad \int_{-1}^1 \bar{y}'^2 d\bar{x} = 1.$$

Величина максимального прогиба оболочки при рассматриваемой деформации равна

$$\varepsilon = \tilde{y}_{\max} = \frac{\pi}{2n} y_{\max}.$$

Осевое сжатие оболочки равно

$$h = \frac{\pi^2}{8n^2} \int_{(b)} y'^2 dx.$$

Отсюда получаем соотношение между осевым сжатием  $h$  и максимальным поперечным прогибом

$$\frac{8n^2 h}{\pi^2} \left( \frac{\pi}{2n\varepsilon} \right)^2 = \frac{1}{(0,65)^2} \frac{2}{b}.$$

Если сюда ввести вместо  $h$  параметр  $\lambda$ , определяемый по формуле

$$h = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha\pi}{2n} \right)^2 \frac{\lambda}{b},$$

то получим следующую зависимость между  $\varepsilon$  и  $\lambda$ :

$$\varepsilon = 1,6\lambda^{1/2} \sqrt{R\delta}.$$

Если подставить определяемое этим соотношением значение  $\lambda$  в формулу для  $\bar{p}(\lambda)$ , то мы получим оценку влияния начальной погиби на устойчивость. На рис. 40 эта зависимость представлена графически. Заметим, что график построен для сравнительно больших значений параметра  $\varepsilon/\sqrt{R\delta}$ . Это связано с тем, что все наши рассуждения относятся к закритическим деформациям со значительными изменениями внешней формы оболочки.

Рассмотрим теперь влияние ограниченной упругости материала оболочки на величину нижней критической нагрузки.

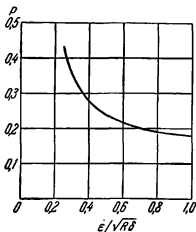


Рис. 40.

Результаты исследования п. 2 применимы только к таким оболочкам с ограниченной упругостью, для которых рассматриваемые там закритические деформации не приводят к напряжениям, выходящим за предел упругости. Для того чтобы выяснить, какой же должна быть такая оболочка, найдем максимальные напряжения при этих деформациях.

Очевидно, максимальные напряжения возникают в зоне сильного местного изгиба оболочки вдоль ребер. Для этих напряжений  $\sigma$  мы имеем формулу

$$\sigma = c'E \left( \frac{1}{\rho} \right)^{1/2} \delta^{1/2} \alpha^{3/2},$$

где  $\rho$  — радиус кривизны ребра,  $\alpha$  — угол между плоскостью ребра и касательными плоскостями поверхности оболочки вдоль ребра, а  $c'$  — постоянная, равная примерно 0,9.

Найдем  $\alpha$  и  $\rho$ . Имеем

$$\alpha = \frac{\pi}{2n}.$$

В исходных переменных  $x, y$  кривизна в вершинах ребер (она там наибольшая) равна

$$\frac{1}{\rho} = |y''|.$$

В безразмерных переменных  $x, y$  имеем

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2n}{\pi} \sqrt{bh} \frac{4}{b^2} |y''|.$$

Принимая во внимание, что

$$h = \frac{1}{2} \left( \frac{a\pi}{2n} \right)^2 \frac{\lambda}{b}, \quad b = a = \frac{\pi R}{n},$$

получим

$$\frac{1}{\rho} = \frac{4n \sqrt{\lambda} |y''|}{\sqrt{2} \pi R}.$$

В нашем приближении функции  $y(x)$  (см. п. 2) величина  $|y''| = k$ . Поэтому

$$\frac{1}{\rho} = \frac{4n \sqrt{\lambda} k}{\sqrt{2} \pi R}.$$

Подставляя значения  $1/\rho$  и  $\alpha$  в формулу для  $\sigma$  и замечая, что

$$n = 0,91 \sqrt{\frac{R}{\delta}},$$

будем иметь

$$\sigma \simeq 2E \frac{\delta}{R} (k \sqrt{\lambda})^{1/2}.$$

В эту формулу входят величины  $k$  и  $\lambda$ . Что касается величины  $k$ , то она связана с  $l$  соотношением

$$\frac{1}{k} = \frac{3}{2l} - \frac{3}{4l^3}.$$

В состоянии упругого равновесия  $l \simeq 0,82$ . Отсюда для  $k$  получается значение  $\simeq 2$ . Величина  $\lambda$  изменяется в процессе закритической деформации. Ее максимальное значение соответствует переходу к устойчивым состояниям равновесия после «хлопка», то есть деформации, при которой воспринимаемая оболочкой нагрузка наименьшая ( $p_l$ ). Это значение  $\lambda$  примерно равно 1,35 (см. п. 2).

Подставляя значения  $k = 2$  и  $\lambda = 1,35$  в формулу для  $\sigma$ , найдем максимальные напряжения в материале оболочки при закритических деформациях, вызванных потерей устойчивости:

$$\sigma = 3E \frac{\delta}{R}.$$

Отсюда мы заключаем, что *рассмотрения п. 2, в частности полученная там формула для нижней критической нагрузки*

$$p_l = 0,18E \frac{\delta}{R},$$

*относятся только к таким оболочкам, у которых напряжения величиной  $3E\delta/R$  не вызывают заметных пластических деформаций.* Это условие можно считать выполненным, если

$$3E \frac{\delta}{R} < \sigma_0,$$

где  $\sigma_0$  — временное сопротивление материала. Такие оболочки мы будем называть тонкими.

Рассмотрим для примера стальные оболочки. Полагая

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \quad \sigma_s = 4 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2,$$

получим

$$\frac{R}{\delta} > 1250.$$

Этот пример показывает, что наши рассмотрения до сих пор относились к очень тонким оболочкам. Практически важный случай  $R/\delta = 500 \div 1250$  оказался вне этого рассмотрения. В связи с этим мы продолжим наше исследование.

Согласно нашим представлениям, закритическая деформация оболочки сопровождается появлением ребер на ее поверхности, которые в процессе деформации изменяют свою форму. Если местный изгиб у ребра оказывается настолько значительным, что на поверхности оболочки возникают пластические деформации, то, как показано в гл. 1, § 2, деформация в этом месте останавливается. Закритическая деформация с появлением необратимых изменений в зоне сильного местного изгиба оказывается энергетически невыгодной. Поэтому, минимизируя энергию деформации  $U$  при заданном осевом сжатии ( $\lambda$ ), мы должны поставить как дополнительное условие ограничение напряжений в зоне сильного местного изгиба. Это условие выглядит так:

$$(k \sqrt{\lambda})^{1/2} \leq 0,5 \frac{\sigma_s}{E} \left( \frac{R}{\delta} \right),$$

где  $k$  и  $\lambda$  имеют прежнее значение (п. 2).

Для оболочек, у которых

$$3E \frac{\delta}{R} \geq \sigma_s,$$

при деформациях, отвечающих нижней критической нагрузке и близких к ним, в указанном условии должно иметь место равенство, то есть

$$(k \sqrt{\lambda})^{1/2} = 0,5 \frac{\sigma_s}{E} \left( \frac{R}{\delta} \right). \quad (*)$$

В п. 2 мы нашли следующие выражения для энергии упругой деформации  $U$  и работы  $A$ , производимой внешней

нагрузкой:

$$U = \frac{\pi^2 E \delta^3}{12(1-\nu^2)n} J + \text{const},$$

$$J = 2kl\lambda + \frac{4l}{\sqrt{k}} \lambda^{3/4} + \frac{8}{3} \frac{l^3}{\sqrt{k}} \lambda^{5/4} + 0,6\lambda,$$

$$A = \frac{\pi^4}{3,3n} E \delta^3 \bar{p} \lambda.$$

Для состояний равновесия оболочки под нагрузкой, близкой к нижней критической, параметры  $k$  и  $l$  по указанной выше причине связаны соотношением (\*). Кроме того, мы имеем соотношение между  $k$  и  $l$

$$\frac{1}{k} = \frac{3}{2l} - \frac{3}{4l^3}.$$

Таким образом, обе величины  $U$  и  $A$  можно считать зависящими от одного параметра.

В качестве такого параметра мы

$$s = \frac{l}{k}.$$

Если ввести параметр  $s$  в выражение энергии деформации  $U$  и производимой внешней нагрузкой работы  $A$ , то из условия равновесия оболочки

$$d(U - A) = 0$$

получается следующее выражение для воспринимаемой оболочкой нагрузки:

$$\bar{p} = 0,03 \left\{ 0,6 + \frac{2\omega s^2 + \left(0,5 + \frac{1}{\omega^3}\right)}{s - s^2} \right\},$$

$$\omega = 0,5 \frac{\sigma_g}{E} \frac{R}{\delta}.$$

Минимизируя выражение  $\bar{p}$  по параметру  $s$ , находим нижнюю критическую нагрузку в зависимости от упруго-пластических свойств материала (параметра  $\omega$ ). На рис. 41 представлен график этой зависимости.

Выясним область применимости полученной зависимости. Для этого прежде всего заметим, что ввиду условия

$\sigma_g < 3E \frac{\delta}{R}$  имеем

$$\omega = 0,5 \frac{\sigma_g}{E} \frac{R}{\delta} < 1,5.$$

Таким образом, для значений  $\omega > 1,5$  надо считать  $\bar{p} = 0,18$ . Далее, зависимостью  $\bar{p}(\omega)$  нельзя пользоваться при слишком малых значениях  $\omega$ , так как при этом закритическую деформацию, отвечающую нижней критической нагрузке, нельзя считать значительной. Подсчет показывает, что закритические деформации ограничено упругих оболочек с данным значением параметра  $\omega$  ограничиваются условием

$$\lambda \leq \frac{2}{3} \omega^4.$$

Поэтому, если  $\omega$  заметно меньше единицы, то  $\lambda$  очень мало, а все наши рассмотрения относятся к таким закритическим деформациям, которые сопровождаются значительным изменением внешней формы.

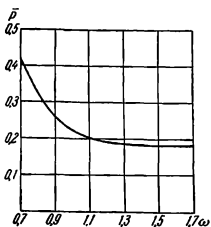


Рис. 41.

Найденная зависимость нижнего критического значения нагрузки от упруго-пластических свойств материала по характеру соответствует данным экспериментальных исследований.

#### 4. Узкие цилиндрические панели при осевом сжатии.

Для того чтобы усилить цилиндрическую оболочку, работающую в условиях осевого сжатия, ее подкрепляют жесткими продольными элементами вдоль образующих. При этом оболочка разбивается на узкие цилиндрические панели. Рассмотрим вопрос о закритических деформациях и критических нагрузках для таких панелей.

Пусть шарнирно закрепленная по краям узкая цилиндрическая панель теряет устойчивость под действием осевой сжимающей нагрузки  $p$ . Так же как и для замкнутых цилиндрических оболочек, поперечный прогиб  $w$  оболочки

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{P}{\delta} \Delta \Delta \Delta \Delta w + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p \Delta \Delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Показывается, что решение  $w(x, y)$  этого уравнения при условии шарнирного опирания панели по краям имеет вид

$$w = c \sin \frac{2\pi m x}{L} \sin \frac{n y}{R}.$$

В отличие от случая замкнутой цилиндрической оболочки, где оба параметра  $m$  и  $n$  целые, для панели шириной  $b$  параметр  $n$  ограничивается условием целочисленности выражения

$$\frac{nb}{\pi R}.$$

Нагрузка  $p$ , вызывающая потерю устойчивости панели, связана с параметрами  $m$  и  $n$  соотношением

$$\frac{D}{\delta} \left( \frac{4\pi^2 m^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^4 + \frac{E}{R^2} \left( \frac{2\pi m}{L} \right)^4 - p \left( \frac{4\pi^2 m^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^2 \left( \frac{2\pi m}{L} \right)^2 = 0,$$

которое после введения новых параметров

$$\xi = \frac{Ln}{2\pi R m}, \quad \eta = \frac{n^2 \delta}{R}$$

и безразмерной нагрузок

$$\bar{p} = p \frac{R}{E\delta}$$

принимает вид

$$\bar{p} = \frac{(1 + \xi^2)^2 \eta}{12(1 - \nu^2) \xi^2} + \frac{\xi^2}{(1 + \xi^2)^2 \eta}.$$

Найдем наименьшее значение нагрузки, способной вызвать потерю устойчивости панели. Полагая

$$\zeta = \frac{(1 + \xi^2)^2}{\xi^2} \eta,$$

будем иметь

$$\bar{p} = \frac{\zeta}{12(1 - \nu^2)} + \frac{1}{\zeta}.$$



Для того чтобы определить  $\min \bar{p}$ , необходимо прежде всего найти область допустимых значений параметра  $\zeta$ . В связи с этим заметим, что из целочисленности выражения  $nb/\pi R$  следует

$$\frac{nb}{\pi R} \geq 1.$$

Поэтому параметр

$$\eta \geq \frac{\pi^2 R \delta}{b^2}.$$

Далее, при всех значениях  $\xi > 0$

$$\frac{\xi^2 + 1}{\xi} \geq 2.$$

Следовательно,

$$\zeta = \frac{(1 + \xi^2)^2}{\xi^2} \eta \geq \frac{4\pi^2 R \delta}{b^2}.$$

Теперь мы уточним, что мы имеем в виду, говоря, панель узкая. Назовем панель узкой, если ее ширина

$$b < \frac{2\pi \sqrt{R\delta}}{\sqrt{12(1-v^2)}}.$$

В силу этого условия для узких панелей

$$\zeta > \sqrt{12(1-v^2)}.$$

Легко видеть, что абсолютный минимум  $\bar{p}$  получается при

$$\zeta = \sqrt{12(1-v^2)}.$$

А это значит, что для узких панелей он достигаться не может. Ввиду монотонности возрастания  $\bar{p}(\zeta)$  при  $\zeta > \sqrt{12(1-v^2)}$ , для узких панелей минимум  $\bar{p}(\zeta)$  получается при наименьшем допустимом значении  $\zeta$ . Найдем его.

Так как

$$\frac{1 + \xi^2}{\xi} \geq 2, \quad \eta \geq \frac{\pi^2 R \delta}{b^2},$$

то наименьшее  $\zeta$  равно

$$\zeta_0 = \frac{4\pi^2 R \delta}{b^2}.$$

Следовательно,

$$\bar{p}_e = \min \bar{p} = \frac{4\pi^2 R\delta}{12(1-\nu^2)b^2} + \frac{b^2}{4\pi^2 R\delta}.$$

Это значение  $p$  получается при

$$\xi = 1, \quad \eta = \frac{\pi^2 R\delta}{b^2}.$$

Итак, для узких цилиндрических панелей верхняя критическая нагрузка  $\bar{p}_e$  определяется по формуле

$$\bar{p}_e = \frac{4\pi^2 R\delta}{12(1-\nu^2)b^2} + \frac{b^2}{4\pi^2 R\delta}.$$

Параметр  $n$ , характеризующий волнообразование в момент потери устойчивости, находится из соотношения

$$\frac{nb}{\pi R} = 1.$$

Закритическая деформация сопровождается появлением квадратных выпучин в один ряд вдоль образующей на всю ширину панели.

Будем характеризовать узость цилиндрической панели параметром  $\tau$ ,

$$\tau = \frac{(12(1-\nu^2))^{1/4}}{2\pi} \frac{b}{\sqrt{R\delta}}.$$

Для узких панелей

$$\tau < 1.$$

Верхняя критическая нагрузка для панели допускает следующее представление:

$$p = p_0 \frac{\tau^2 + \frac{1}{\tau^2}}{2},$$

где  $p_0$  — верхняя критическая нагрузка для замкнутой цилиндрической оболочки при осевом сжатии.

Найдем нижнюю критическую нагрузку узкой панели. Закритическое упругое состояние цилиндрической панели при осевом сжатии мы отождествляем с закритическим состоянием замкнутой оболочки при условии равенства параметров  $m$  и  $n$ , характеризующих эти состояния. Сделав такое предположение, мы можем воспользоваться готовым, полученным в п. 2 выражением для энергии деформации  $U$

и производимой нагрузкой работы  $A^*$ ). Имеем (стр. 188)

$$U = \frac{\pi^2 E \delta^3 \lambda}{12(1-\nu^2) \pi \xi^3} \int_{-1}^1 y''^2 dx + \frac{\pi^2 \nu E \delta^3 \lambda}{6(1-\nu^2) \pi \xi} + \\ + \frac{2^{1/2} c}{4n^2} \pi^3 E \delta^{3/2} R^{1/2} \lambda^{1/2} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} \left(1 + \frac{2\lambda}{\xi^2} y'^2\right) dx + \text{const.}$$

Для панели  $\xi = 1$ , а  $n$  определяется из соотношения

$$\frac{nb}{\pi R} = 1,$$

где  $b$  — ширина панели. Если ввести эти значения  $\xi$  и  $n$  в выражение для  $U$ , то оно принимает следующий вид:

$$U = \frac{\pi^2 E \delta^3}{12(1-\nu^2) \pi} \left\{ \lambda \int_{-1}^1 y''^2 dx + 2\nu\lambda + \right. \\ \left. + 2\tau\lambda^{1/2} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} (1 + 2\lambda y'^2) dx \right\} + \text{const.}$$

Найдем производимую внешней нагрузкой работу. Имеем (стр. 190)

$$A = 2\pi R \delta \rho h, \\ h = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2n} \frac{\pi R}{n} \right)^2 \frac{n}{\pi R} \lambda, \\ n = \frac{\pi R}{b}, \quad b^2 = \frac{4\pi^2 R \delta \tau^2}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}.$$

С помощью этих соотношений выражение для работы  $A$  приводится к виду

$$A = \frac{\pi^4}{3,3\pi} E \delta^3 \bar{\rho} \lambda \tau^2.$$

\*) Разумеется, при этом игнорируются условия закрепления по образующим панели. Поэтому величина нижней критической нагрузки, к которой мы приходим, будет меньше истинной. Однако есть основания считать, что она все же близка к ней по крайней мере для не слишком узких панелей.

Так же как и в случае замкнутых оболочек, истинную форму поверхности, а следовательно, и энергию деформации, мы определяем из условия минимума функционала  $U(y)$  при заданном осевом сжатии. Это эквивалентно задаче на минимум для функционала

$$J_{\tau} = \lambda \int_{-1}^1 y'^2 dx + 0,6\lambda + 2\tau\lambda^{1/2} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} (1 + 2\lambda y'^2) dx$$

при условиях

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = 1,$$

$$y'(-1) = y'(1) = 0.$$

При  $\tau = 0$  эта задача имеет очевидное решение

$$y_0(x) = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2}.$$

Пусть функция  $y_{\tau}(x)$  реализует минимум функционала  $J_{\tau}$  при малом  $\tau$ . Очевидно, она близка к  $y_0(x)$ . Ввиду стационарности функционала на функции, реализующей минимум, можно принять  $\min J_{\tau}$  равным его значению на функции  $y_0(x)$ . Допустимая при этом ошибка будет иметь порядок  $\tau^2$ .

Подставляя в выражение функционала  $J_{\tau}$  функцию  $y_0(x)$ , получим

$$J_{\tau} = \left( \frac{\pi^2}{4} + 0,6 \right) \lambda + \tau (3,8\lambda^{1/4} + 3\lambda^{3/4}).$$

Теперь из условия равновесия оболочки

$$\frac{d}{d\lambda} (U - A) = 0$$

находим воспринимаемую оболочкой нагрузку  $p$  в зависимости от деформации ( $\lambda$ )

$$\bar{p} = \frac{0,03}{\tau^2} (3,1 + \tau (0,95\lambda^{-1/4} + 3,75\lambda^{1/4})),$$

$$\text{in } \bar{p} \simeq \frac{0,03}{\tau^2} (3,1 + 4,6\tau).$$

Исследование вопроса о критических нагрузках для узких панелей мы подытожим следующим выводом.

Для узкой цилиндрической панели, шарнирно опертой по сторонам, при осевом сжатии верхняя критическая нагрузка равна

$$p_e = \bar{p}_e E \frac{\delta}{R}, \quad \bar{p}_e = 0,3 \left( \tau^2 + \frac{1}{\tau^2} \right);$$

нижняя критическая нагрузка равна

$$p_i = \bar{p}_i E \frac{\delta}{R}, \quad \bar{p}_i = \frac{0,03}{\tau^2} (3,1 + 4,6\tau).$$

Параметр  $\tau$  через ширину панели  $b$ , радиус кривизны  $R$  и толщину  $\delta$  определяется равенством

$$\tau = \frac{(12(1-\nu^2))^{1/4}}{2\pi} \frac{b}{\sqrt{R\delta}}.$$

Панель считается узкой, если  $\tau < 1$ .

5. Конструктивно ортотропные цилиндрические оболочки при осевом сжатии. Цилиндрическую оболочку, подкрепленную упругими стрингерами, при достаточной густоте расстановки последних можно рассматривать как ортотропную. В настоящем пункте мы рассмотрим такую оболочку, находящуюся в условиях осевого сжатия.

Итак, пусть круговая цилиндрическая оболочка радиуса  $R$ , длины  $L$  и толщины  $\delta$  подкреплена густо расставленными стрингерами. Пусть  $f$  — площадь сечения стрингера,  $I$  — момент инерции в основной плоскости (радиальной плоскости), а  $l$  — расстояние между стрингерами. Модуль упругости обшивки и стрингеров будем обозначать через  $E$ , а поперечное сжатие  $\nu$  для простоты выкладок положим равным нулю.

Введем на поверхности оболочки ортогональные координаты  $x$ ,  $y$ , приняв за линии  $x$  прямолинейные образующие. Модули упругости  $E_1$  и  $E_2$  по направлениям  $x$  и  $y$  оболочки как ортотропной будут

$$E_1 = E \left( 1 + \frac{\delta'}{\delta} \right), \quad E_2 = E,$$

где  $\delta'$  — общая площадь сечения стрингеров на единицу длины вдоль линий  $y$ , т. е.

$$\delta' = \frac{f}{l}.$$

Изгибная жесткость оболочки в плоскости, перпендикулярной стрингерам, равна

$$D_2 = D = \frac{E\delta^3}{12}.$$

Изгибная жесткость в основной плоскости равна

$$D_1 = \frac{E\delta^3}{12} + \frac{EI}{l}.$$

Основные уравнения для ортотропной оболочки, находящейся в условиях осевого сжатия, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{D}{\delta} \Omega w &= -p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \\ \frac{1}{E} \Omega' w &= -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Здесь  $w$  — поперечный прогиб оболочки в момент потери устойчивости под нагрузкой  $p$ ,  $\Phi$  — функция напряжений, а  $\Omega$  и  $\Omega'$  — дифференциальные операторы,

$$\begin{aligned} \Omega &= (1 + \omega) \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \\ \Omega' &= (1 + \omega') \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \\ \omega &= \frac{D_1 - D_2}{D_2} = \frac{12I}{\delta^3 l}, \\ \omega' &= E \left( \frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) = \frac{\delta'}{\delta + \delta'}. \end{aligned}$$

Если из уравнений потери устойчивости исключить функцию напряжений  $\Phi$ , то для  $w$  получается следующее уравнение:

$$\frac{D}{\delta} \Omega \Omega' w + p \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Omega' w) + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0.$$

Примем форму прогибов оболочки в момент потери устойчивости в виде

$$w = c \sin \frac{2\pi m x}{L} \sin \frac{n y}{R}.$$

Если подставить это выражение  $w$  в уравнение для прогиба, то получим некоторое соотношение для параметров

$m$  и  $n$ . Полагая для краткости

$$\xi = \frac{Ln}{2\pi Rm}, \quad \eta = \frac{n^2\delta}{R}, \quad \bar{p} = \frac{pR}{E\delta},$$

этому соотношению можно придать вид

$$\bar{p} = \frac{\omega + (1 + \xi^2)^2}{12\xi^2} \eta + \frac{\xi^2}{\omega' + (1 + \xi^2)^2} \frac{1}{\eta}.$$

Найдем наименьшую нагрузку, способную вызвать потерю устойчивости оболочки, то есть верхнюю критическую нагрузку. При фиксированном  $\xi$  минимум  $\bar{p}(\xi, \eta)$  по переменной  $\eta$  получается, когда

$$\frac{\omega + (1 + \xi^2)^2}{12\xi^2} \eta = \frac{\xi^2}{\omega' + (1 + \xi^2)^2} \frac{1}{\eta},$$

и этот минимум равен

$$\bar{p}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{\omega + (1 + \xi^2)^2}{\omega' + (1 + \xi^2)^2} \right)^{1/2}$$

Предположим, что  $\omega > \omega'$ . Физический смысл этого условия состоит в том, что подкрепление оболочки стрингерами относительно больше увеличивает жесткость на изгиб, чем на растяжение — сжатие. В этом предположении

$$\min_{(\xi)} \bar{p}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

и он достигается при  $\xi = \infty$ . Но это значение  $\xi$  недопустимо, так как

$$\xi = \frac{Ln}{2\pi Rm},$$

а  $n$  и  $m$  принимают только целочисленные значения. В связи с этим, и принимая еще во внимание монотонность убывания  $\bar{p}(\xi)$  при возрастании  $\xi$ , мы примем для  $m$  наименьшее возможное значение  $m = 0,5$ .

Приняв  $m = 0,5$ , будем иметь

$$\frac{\xi^2}{\eta} = \frac{L^2}{\pi^2 R\delta}.$$

Теперь  $\bar{p}$  можно представить в следующей форме:

$$\bar{p} = \frac{\varepsilon(\omega - \omega')}{12} + \frac{\varepsilon}{12} \vartheta(\xi) + \frac{1}{\varepsilon\vartheta(\xi)},$$

$$\varepsilon = \frac{\pi^2 R\delta}{L^2}, \quad \vartheta(\xi) = \omega' + (1 + \xi^2)^2.$$

Минимум  $\bar{p}$  достигается при условии

$$\frac{1}{12} \varepsilon \vartheta'(\xi) = \frac{1}{\varepsilon \vartheta(\xi)} \quad (*)$$

и он равен

$$\bar{p}_e = \frac{\pi^2 (\omega - \omega')}{12} \frac{R\delta}{L^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Если предположить, что величина  $\xi$ , при которой достигается  $\min \bar{p}$ , значительна, то можно считать

$$\vartheta(\xi) \simeq \xi^4.$$

Тогда соотношение (\*) для  $\xi$  принимает вид

$$\frac{1}{12} \varepsilon \xi^4 = \frac{1}{\varepsilon \xi^4}.$$

Отсюда находим  $\xi$ , а с ним и параметр  $n$ :

$$\xi = 12^{1/4} \frac{1}{\varepsilon^{1/4}},$$

$$n = \frac{\pi R}{L} \xi = (12\pi^4)^{1/4} \frac{R}{L} \left( \frac{L^2}{R\delta} \right)^{1/4}.$$

Заметим, что  $R\delta/L^2$  обычно мало. Поэтому наше предположение относительно величины  $\xi$  не лишено оснований.

Если постановка стрингеров значительно увеличивает изгибную жесткость, а не жесткость на растяжение — сжатие, то есть  $\omega \gg \omega'$ , то можно считать  $\omega - \omega' \simeq \omega$ . При этом для верхней критической нагрузки можно принять выражение

$$\bar{p}_e = \frac{\pi^2 \omega}{12} \frac{R\delta}{L^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Для того чтобы представить наглядно полученный результат, найдем критическое усилие на единицу длины сечения



оболочки. Имеем

$$\begin{aligned} p_e \delta &= \bar{p}_e E \frac{\delta}{R} \delta, \\ \frac{1}{\sqrt{3}} E \frac{\delta^2}{R} &\simeq 0,6 E \frac{\delta}{R} \delta, \\ \frac{\pi^2 \omega}{12} \frac{R \delta}{L^2} E \frac{\delta}{R} \delta &= \pi^2 \left( \frac{EI}{L^2} \right) \frac{1}{I}. \end{aligned}$$

Величина

$$0,6 E \frac{\delta}{R} \delta$$

представляет собой критическое усилие на единицу длины поперечного сечения неподкрепленной обшивки, а

$$\pi^2 \left( \frac{EI}{L^2} \right) \frac{1}{I}$$

есть эйлера сила для изолированных стрингеров. Таким образом, критическая нагрузка для рассматриваемой оболочки состоит из критической нагрузки неподкрепленной оболочки и критической нагрузки для изолированных стрингеров.

Рассмотрим теперь закритические деформации подкрепленной оболочки. В связи с этим найдем прежде всего выражение для энергии деформации вдоль ребер. В гл. 1, § 1 (стр. 30) для изотропной оболочки эта энергия на единицу длины ребра вычислялась по формуле

$$\bar{U}_\gamma = \frac{D}{2} \int_{-\bar{e}}^{\bar{e}} v''^2 ds + \frac{\bar{D}}{2} \int_{-\bar{e}}^{\bar{e}} \frac{u^2}{\rho^2} ds + D\alpha(-2k + k_e + k_i).$$

Для анизотропной оболочки получается точно такое же выражение. Только теперь  $D$  является жесткостью на изгиб в плоскости, перпендикулярной ребру, а  $\bar{D}$  — жесткость на растяжение — сжатие вдоль ребра.

Положим

$$\omega = \frac{12D}{\delta^2 \bar{D}}, \quad \bar{\omega} = \frac{2\bar{D}}{E\delta}.$$

Тогда выражение  $\bar{U}_\gamma$  примет вид

$$\bar{U} = \frac{\delta E \bar{\omega}}{2} \int_{-\bar{e}}^{\bar{e}} \left( \omega \frac{\delta^2 v''^2}{12} + \frac{u^2}{\rho^2} \right) ds +$$

где опущено слагаемое

$$D\alpha(-2k + k_e + k_l).$$

Если с этого момента мы повторим слово в слово все рассуждения, которые в аналогичном случае изотропных оболочек приведены в гл. 1, § 1, то для энергии деформации получим выражение

$$\bar{U}_\gamma = \frac{\bar{\omega}}{12^{1/4}} E \delta^{1/2} \alpha^{1/2} \rho^{-1/2} J_0 +$$

Здесь  $J_0$  — минимум функционала

$$J = \int_0^\infty (\omega v'^2 + u^2) ds$$

при неголономной связи

$$u' + v + \frac{v^2}{2} = 0 \quad (**)$$

и краевых условиях

$$u(0) = 0, \quad v(0) = -1, \quad u(\infty) = v(\infty) = 0. \quad (***)$$

Для того, чтобы найти  $\min J$ , целесообразно ввести вместо переменных  $u$  и  $s$  новые переменные  $\lambda u$  и  $\lambda s$ . Относительно новых переменных связь (\*\*) и краевые условия (\*\*\*) сохраняются, а функционал принимает вид

$$J = \int_0^\infty \left( \frac{\omega v'^2}{\lambda^2} + \lambda^2 u^2 \right) \lambda ds$$

(черта над новыми переменными опущена). Подчиняя теперь неопределенный множитель  $\lambda$  условию

$$\lambda^4 = \omega,$$

будем иметь

$$J = \omega^{1/4} \int_0^\infty (v'^2 + u^2) ds.$$

Таким образом, определение коэффициента  $J_0$  сведено к определению минимума функционала

$$\int_0^\infty (v'^2 + u^2) ds$$

при связи (\*\*) и краевых условиях (\*\*\*). В главе 1, § 1 этот минимум найден, и для него получено значение  $\approx 1,15$ . Следовательно,

$$J_0 = 1,15\omega^{3/4}.$$

Как показано выше, потеря устойчивости круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной стрингерами, сопровождается образованием сплошных выпучин по всей длине оболочки ( $m = 0,5$ ), равномерно распределенных по окружности. Мы будем предполагать, что закритическая деформация имеет такой же характер.

Для энергии  $U$  закритической деформации изотропной оболочки мы имеем формулу (стр. 188)

$$U = \frac{\pi^2 E \delta^3 \lambda}{12(1-\nu^2) n \xi^3} \int_{-1}^1 y''^2 dx + \frac{\pi^2 (\nu-1) E \delta^3 \lambda}{6(1-\nu^2) n \xi} + \\ + \frac{2^{1/4} c}{4n^2} \pi^3 E \delta^{5/2} R^{1/2} \lambda^{1/4} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} \left(1 + \frac{2\lambda y'^2}{\xi^2}\right) dx + \text{const.}$$

Здесь первое слагаемое учитывает изгиб по основной поверхности оболочки. Этот изгиб происходит в радиальных плоскостях, то есть в направлении прямолинейных образующих. Второе слагаемое учитывает изгиб в плоскости, перпендикулярной ребру. Ввиду того, что области выпучивания идут через всю длину оболочки, можно считать, что это изгиб в плоскости, перпендикулярной образующим. Третье слагаемое учитывает энергию сложной деформации вдоль ребра.

Нетрудно сообразить, что если мы применим тот же метод рассмотрения и для ортотропной оболочки, то получим аналогичную формулу. Она будет отличаться от приведенной некоторыми множителями перед указанными слагаемыми из-за изменения жесткости оболочки. Именно, первое слагаемое получит множитель

$$D / \frac{E \delta^3}{12},$$

где  $D$  — изгибная жесткость ортотропной оболочки (подкрепленной стрингерами), а  $E \delta^3 / 12$  — жесткость неподкрепленной

оболочки. Второе слагаемое останется без изменения, а третье получает множитель

$$\bar{\omega}\omega^{3/4}.$$

Как показано выше, изгибная жесткость подкрепленной оболочки в радиальных плоскостях равна

$$D = \frac{E\delta^3}{12} + \frac{EI}{l},$$

где  $\delta$  — толщина оболочки, а  $EI/l$  — жесткость подкрепляющих стрингеров на единицу длины поперечного сечения оболочки. Таким образом,

$$D / \frac{E\delta^3}{12} = 1 + \frac{12I}{l\delta^3}.$$

Обратимся ко второму множителю  $\bar{\omega}\omega^{3/4}$ . Рассматривая этот множитель, заметим, что параметр  $\xi$  достаточно велик, и поэтому направление ребер на поверхности оболочки близко к направлению образующих. Поэтому величину  $\bar{\omega}$  равную отношению жесткостей на растяжение — сжатие подкрепленной стрингерами и неподкрепленной оболочки, можно считать равной  $(\delta + \delta')/\delta$ , где  $\delta'$  — общая площадь стрингеров на единицу длины поперечного сечения. Оценивая величину  $\omega$ , заметим, что ввиду близости направления ребра к направлению стрингера, можно считать изгибную жесткость в направлении, перпендикулярном ребру, равной  $E\delta^3/12$ . Поэтому

$$\omega = \frac{\delta}{\delta + \delta'}.$$

Следовательно, множ

$$\bar{\omega}\omega^{3/4} = \left(\frac{\delta + \delta'}{\delta}\right)^{3/4}.$$

Положим для краткости

$$D / \frac{E\delta^3}{12} = \vartheta, \quad \bar{\omega}\omega^{3/4} = \vartheta'.$$

Тогда энергия деформации ортотропной оболочки запишется в виде

$$U = \frac{\vartheta \pi^2 E \delta^3 \lambda}{12 n \xi^3} \int_{-1}^1 y''^2 dx + \\ + \vartheta' \frac{2^{1/4} c}{4 n^2} \pi^3 E \delta^{1/2} R^{1/2} \lambda^{1/4} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} \left(1 + \frac{2\lambda y'^2}{\xi^2}\right) dx + \text{const.}$$

Ввиду того, что  $\xi$  велико, можно считать

$$1 + \frac{2\lambda}{\xi^2} y'^2 \simeq 1.$$

Введем в формулу для  $U$  значения

$$\xi = \left(\frac{12}{\pi^4}\right)^{1/6} \left(\frac{L^2}{R\delta}\right)^{1/4}, \\ n = (12\pi^4)^{1/6} \left(\frac{L^2}{R\delta}\right)^{1/4} \frac{R}{L}.$$

Тогда получим

$$U = \frac{\pi^2 E \delta^3}{12} \left(\frac{L}{R}\right) \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{12}} \left(\frac{R\delta}{L^2}\right) \vartheta \lambda \int_{-1}^1 y''^2 dx + \right. \\ \left. + 0,35 \vartheta' \lambda^{1/4} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} dx \right\} + \text{const.}$$

Энергия закритической деформации ортотропной оболочки в состоянии упругого равновесия определяется из условия стационарности функционала  $U(y)$  на функциях  $y(x)$  с

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = 1.$$

Эту вариационную задачу мы рассмотрим при условии

$$\frac{\pi}{\sqrt{12}} \left(\frac{R\delta}{L^2}\right) \vartheta \gg 0,35 \vartheta'.$$

Физический смысл этого условия состоит в том, что полукрепление оболочки стрингерами весьма значительно уси-

ливают жесткость оболочки на изгиб в радиальных плоскостях. Это предположение естественно, так как постановкой стрингеров обычно хотят достигнуть именно этого.

При указанном условии естественно предположить, что функция  $y(x)$ , сообщающая функционалу  $U(y)$  стационарное значение, близка к функции  $y(x)$ , реализующей минимум функционала

$$U' = \frac{\pi^2 E \delta^3}{12} \left( \frac{L}{R} \right) \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{12}} \left( \frac{R \delta}{L^2} \right) \vartheta \lambda \int_{-1}^1 y'^2 dx \right\} + \text{const},$$

который получается из функционала  $U$  путем отбрасывания подчиненного по величине слагаемого. Мы будем исходить из этого предположения.

Функция, минимизирующая функционал  $U'(y)$  при условии

$$\int_{-1}^1 y'^2 dx = 1,$$

и равная нулю на концах интервала  $(-1, 1)$ , будет

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2}.$$

Ввиду принятого допущения, энергию деформации оболочки в состоянии упругого равновесия мы получим, если подставим функцию  $\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2}$  в формулу для  $U$ :

$$U = \frac{\pi^2 E \delta^3}{12} \left( \frac{L}{R} \right) \left\{ \frac{\pi^3}{4 \sqrt{12}} \left( \frac{R \delta}{L^2} \right) \vartheta \lambda + 0,68 \vartheta' \lambda^{1/4} \right\} + \text{const}.$$

Найдем теперь работу  $A$ , производимую осевым сжатием. Так же как и в случае изотропной оболочки, получаем

$$A = \frac{\pi^4 E R \delta^2 \lambda \bar{p}}{4 n^3 \xi}.$$

Подставляя сюда значения параметров  $n$  и  $\xi$ , будем иметь

$$A = \frac{\pi^3 E \delta^3}{4 \sqrt{12}} \left( \frac{L}{R} \right) \lambda \bar{p}.$$

Теперь из условия равновесия

$$\frac{dU}{d\lambda} = \frac{dA}{d\lambda}$$

находим связь между деформацией оболочки ( $\lambda$ ) и воспринимаемой оболочкой нагрузкой ( $\bar{p}$ ). Именно,

$$\bar{p} = \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{R\delta}{L^2} \right) \vartheta + 0,062\lambda^{-1/4}\vartheta'.$$

Из формулы для  $\bar{p}$  мы видим, что воспринимаемая оболочкой нагрузка уменьшается при увеличении деформации ( $\lambda$ ). Наименьшая величина  $\bar{p}$  получается при максимальном значении  $\lambda$ , равном  $\simeq \pi^2/8$ . Подставляя это значение в формулу для  $\bar{p}$ , находим величину нижней критической нагрузки

$$\bar{p}_l = \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{R\delta}{L^2} \right) \vartheta + 0,053\vartheta'.$$

Так как по предположению постановка стрингеров значительно усиливает жесткость оболочки на изгиб в радиальных плоскостях, то

$$\vartheta = 1 + \frac{12I}{I\delta^3} \simeq \frac{12I}{I\delta^3} = \omega,$$

$$\bar{p}_l = \frac{\pi^2\omega}{12} \left( \frac{R\delta}{L^2} \right) + 0,053\vartheta'.$$

Сравнивая эту величину с верхней критической нагрузкой, мы заключаем, что *при достаточной жесткости подкрепляющих стрингеров воспринимаемая оболочкой нагрузка после потери устойчивости практически не уменьшается, оставаясь равной примерно верхнему критическому значению*

$$p_e = \frac{\pi^2\omega}{12} \left( \frac{R\delta}{L^2} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

## § 2. Цилиндрические оболочки под внешним давлением

В этом параграфе мы рассмотрим закритические деформации цилиндрических оболочек, возникающие в результате потери устойчивости под равномерно распределенным внешним давлением. Так же как и в случае осевого сжатия (§ 1), это рассмотрение будет основано на применении принципа А.

1. Выражение для функционала  $W = U - A$ . Опыт показывает, что потеря устойчивости цилиндрической оболочки

под внешним давлением сопровождается образованием сплошных вмятин на всю длину оболочки с правильным расположением их по окружности. В связи с этим функционал  $W$  можно рассматривать на изометрических преобразованиях типа  $Z$ , которые построены в п. 1 § 1. Напомним эти преобразования.

Возьмем правильную призму с числом боковых граней  $2n$  и проведем на какой-нибудь ее грани  $\alpha$  произвольную кривую  $\gamma$ , соединяющую середины оснований этой грани и однозначно проектирующуюся на ось призмы. Отразим кривую  $\gamma$  зеркально в радиальной плоскости, проходящей через ось призмы и ребро грани  $\alpha$ . При этом получим кривую  $\gamma'$  в грани  $\alpha'$ , смежной  $\alpha$ . После этого с помощью грани  $\alpha'$  и кривой  $\gamma'$  в ней строим кривую  $\gamma''$  в грани  $\alpha''$ , смежной  $\alpha'$ , и т. д. Таким образом, в каждой грани  $\alpha^i$  получится кривая  $\gamma^i$ . Проведем теперь произвольную плоскость  $\sigma$ , перпендикулярную оси призмы. Она пересечет кривые  $\gamma^i$  в точках  $A^i$ . Пусть  $P_\sigma$  — многоугольник с вершинами  $A^i$ . Когда плоскость  $\sigma$  параллельно смещается, многоугольник  $P_\sigma$  описывает изометричную цилиндру поверхность  $Z$ . Кривые  $\gamma^i$  являются ребрами на этой поверхности (рис. 42).

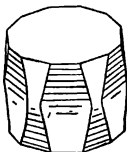


Рис. 42.

Определим некоторые геометрические величины для поверхности  $Z$ . В связи с этим в грани  $\alpha$  введем прямоугольные декартовы координаты  $x, y$ , приняв центр грани за начало координат, а прямые, проходящие через центр грани параллельно ее сторонам — за координатные оси. В этих координатах кривая  $\gamma$  задается уравнением

$$y = y(x).$$

Кривизна кривой  $\gamma$  равна

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Если  $n$  достаточно велико, или, лучше сказать, грань  $\alpha$  заметно вытянута в направлении оси призмы, то для интересующих нас кривых  $\gamma$  можно считать  $1 + y'^2 \simeq 1$  и



поэтому

$$k \simeq |y''|.$$

Для угла  $\vartheta$  между плоскостью ребра  $\gamma$  и касательными плоскостями поверхности  $Z$  получается выражение

$$\vartheta = \frac{\pi}{2n} \sqrt{1 + y'^2}.$$

Здесь также можно игнорировать  $y'^2$  под знаком корня. Тогда для угла  $\vartheta$  получается выражение

$$\vartheta \simeq \frac{\pi}{2n}.$$

При определении энергии упругой деформации оболочки в форме  $Z$  нам понадобится нормальная кривизна  $\tilde{k}$  этой поверхности. Для нее получается выражение

$$\tilde{k} = \frac{\pi}{2n} y''.$$

Это выражение, так же как и предыдущие, получается после аналогичных упрощений.

Производимая внешним давлением работа измеряется произведением величины давления на изменение объема, ограничиваемого оболочкой, при деформации последней. В связи с этим найдем объем, который ограничивает поверхность  $Z$  вместе с основаниями призмы, которые ее закрывают.

Пересечение поверхности  $Z$  с плоскостью  $\sigma$ , перпендикулярной ее оси, есть  $2n$ -угольник  $P_\sigma$ . Если его площадь обозначить  $S$ , то интересующий нас объем равен

$$V = \int_{-L/2}^{L/2} S dx.$$

Таким образом, для того чтобы найти объем  $V$  в зависимости от функции  $y(x)$ , задающей форму поверхности  $Z$ , нам надо прежде всего найти выражение  $S$  в зависимости от  $y$ .

Пусть  $2n$ -угольник с вершинами в серединах сторон многоугольника, лежащего в основании призмы, обозначен

через  $P_0$ . Тогда независимо от положения плоскости  $\sigma$  у каждого  $2n$ -угольника  $P_\sigma$  стороны параллельны сторонам  $P_0$ .

Плоскость  $\sigma$  пересекает призму по правильному  $2n$ -угольнику  $\bar{P}$ . Заномеруем вершины этого многоугольника в порядке их следования и обозначим через  $P'$  правильный  $n$ -угольник с четными вершинами  $\bar{P}$ , а через  $P''$  — правильный  $n$ -угольник с нечетными вершинами  $\bar{P}$ . Многоугольник  $P_\sigma$  вписан в  $\bar{P}$ , и его стороны образуют равные углы со сторонами  $\bar{P}$ . Отсюда следует, что многоугольник  $P_\sigma$  получается линейным смешиванием многоугольников  $P'$  и  $P''$  по Минковскому\*). Именно,

$$P_{\sigma} = \frac{\frac{a}{2} - y}{a} P' + \frac{\frac{a}{2} + y}{a} P'',$$

где  $a$  — сторона многоугольника  $\bar{P}$ .

По известной формуле площадь многоугольника

$$P = \lambda P' + \mu P'' \quad (\lambda + \mu = 1)$$

равна

$$S = \lambda^2 S' + 2\lambda\mu S_{12} + \mu^2 S'', \quad S_{12} = 2S_0 - \frac{S' + S''}{2},$$

где  $S'$  и  $S''$  — площади многоугольников  $P'$  и  $P''$  соответственно, а  $S_0$  — площадь многоугольника  $P$ , который получается в линейной комбинации  $P'$  и  $P''$  при  $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ . В нашем случае  $S_0$  представляет собой площадь  $2n$ -угольника  $P_0$ .

Принимая во внимание, что  $\lambda + \mu = 1$  и  $S' = S''$ , формулу для  $S$  можно преобразовать. Именно,

$$S = S' + 4\lambda\mu(S_0 - S').$$

---

\*) Линейной комбинацией фигур  $F'$  и  $F''$ , лежащих в одной плоскости или параллельных плоскостях, называется фигура

$$F = \lambda F' + \mu F'',$$

которую описывает конец вектора  $r = \lambda r' + \mu r''$ , когда концы векторов  $r'$  и  $r''$  независимо описывают фигуры  $F'$  и  $F''$ . См. А. Д. Александров, Выпуклые многогранники, Гостехиздат, 1950 г.

Подставляя сюда

$$\lambda = \frac{\frac{a}{2} - y}{a}, \quad \mu = \frac{\frac{a}{2} + y}{a},$$

получим

$$S = (*) - \frac{4y^2}{a^2} (S_0 - S'),$$

где (\*) — слагаемое, не зависящее от  $y$ .

Вводя теперь в формулу для объема  $V$  найденное выражение  $S$ , получим

$$V = (*) - \frac{4}{a^2} (S_0 - S') \int_{-L/2}^{L/2} y^2 dx.$$

В связи с предстоящими выкладками целесообразно перейти от переменных  $x$ ,  $y$ , которыми мы до сих пор пользовались, к новым, безразмерным  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ , полагая

$$x = \frac{L}{2} \bar{x}, \quad y = \frac{a}{2} \bar{y}.$$

Здесь  $L$  — высота призмы, которую мы будем отождествлять с высотой исходной оболочки,  $a$  — сторона основания призмы. Если радиус исходной оболочки равен  $R$ , то

$$a = \frac{\pi R}{n}.$$

Интервал изменения переменных  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ , очевидно, есть  $(+1, -1)$ . В новых переменных, черту над обозначениями которых в дальнейшем будем опускать, интересующие нас геометрические величины будут вычисляться по формулам:

$$k = \frac{2\pi R}{nL^2} |y''|,$$

$$\tilde{k} = \frac{\pi^2 R}{n^2 L^2} y'',$$

$$V = (*) - \frac{\pi^3 R^2 L}{8n^2} \int_{-1}^1 y^2 dx.$$

Так же как в случае осевого сжатия, для энергии деформации оболочки получается следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{\pi^6 E \delta^3}{24 (1 - \nu^2) n^4} \left( \frac{R}{L} \right)^3 \int_{-1}^1 y''^2 dx + \\
 & + \frac{\pi^3 \nu E \delta^3}{12 (1 - \nu^2) n^2} \left( \frac{R}{L} \right) \int_{-1}^1 y'^2 dx + \\
 & + \frac{\pi^3 c}{4 n^2} E \delta^{3/2} R^{1/2} \int_{-1}^1 |y''|^{3/2} dx + \text{const.}
 \end{aligned}$$

Содержащийся в этой формуле целочисленный параметр  $n$  мы определим из условия периодичности прогибов по окружности оболочки в момент потери устойчивости.

Поперечный прогиб  $w$  цилиндрической оболочки в момент потери устойчивости под давлением  $q$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{D}{\delta} \Delta \Delta \Delta \Delta w + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{qR}{\delta} \Delta \Delta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (*)$$

Показывается, что при условии шарнирного опирания оболочки решение этого уравнения имеет вид

$$w = c \sin \frac{\pi m x}{L} \sin \frac{\pi y}{R}.$$

Подставляя это выражение  $w$  в уравнение (\*), получим некоторое соотношение между параметрами  $m$ ,  $n$  и нагрузкой  $q$ . Если вместо  $m$  и  $n$  ввести параметры

$$\xi = \frac{\pi m R}{L n}, \quad \eta = \frac{n^2 \delta}{R}$$

и безразмерную нагрузку

$$\bar{q} = \frac{q R^2}{E \delta^3},$$

то указанному соотношению можно придать вид

$$\bar{q} = \frac{1 + \xi^2}{12 (1 - \nu^2)} \eta + \frac{\xi^4}{(1 + \xi^2) \eta}.$$

Минимальное значение  $\bar{q}$  отвечает верхней критической грузке. Если параметр

$$\varepsilon = \frac{R\delta}{L^2}$$

$$\min \bar{q} = \bar{q}_e = \frac{4\pi\sqrt{\varepsilon}}{(36(1-\nu^2))^{1/4}} \simeq 0,92 \sqrt{\varepsilon}.$$

Это минимальное значение  $\bar{q}$  получается для  $m=1$  и  $n$ , определяемого соотношением

$$\left(\frac{\pi R}{Ln}\right)^8 = \frac{\pi^4 \varepsilon^2}{36(1-\nu^2)}. \quad (**)$$

Так как характер периодичности прогибов в процессе закритической деформации сохраняется, то значение  $n$ , которое входит в выражение энергии деформации, определяется соотношением (\*\*). Подставляя значение  $n$  в формулу для  $U$ , получим

$$U = \frac{\pi^3 E \delta^3}{24(1-\nu^2)n^2} \left(\frac{R}{L}\right) \left\{ \frac{\pi\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{6}} \int_{-1}^1 y''^2 dx + 2\nu \int_{-1}^1 y'^2 dx + \right. \\ \left. + 6(1-\nu^2) \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} dx \right\} + \text{const.}$$

Найдем производимую внешним давлением  $q$  работу при деформации оболочки. Изменение объема, ограниченного оболочкой, равно

$$\Delta V = \frac{\pi^3 R^2 L}{8n^2} \int_{-1}^1 y^2 dx + \text{const.}$$

Работа

$$A = q \Delta V.$$

Отсюда

$$A = \frac{\pi^3 R^2 L q}{8n^2} \int_{-1}^1 y^2 dx + \text{const.}$$

Или, вводя безразмерную величину  $\bar{q}$ , связанную с внешним давлением соотношением

$$q = \bar{q} E \frac{\delta^2}{R^2},$$

получим

$$A = \frac{\pi^3 \bar{q} E \delta^3}{8n^2 \epsilon} \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{R}{L} \right) \int_{-1}^1 y^2 dx + \text{const.}$$

2. Исследование закритических деформаций неограниченно упругих оболочек под внешним давлением. Положим

$$J = \frac{\pi \sqrt{\epsilon}}{\sqrt{6}} \int_{-1}^1 y''^2 dx + 2\nu \int_{-1}^1 y'^2 dx + 6(1-\nu^2) \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} dx,$$

$$\lambda = \int_{-1}^1 y^2 dx.$$

Тогда

$$U = \frac{\pi^3 E \delta^3}{24(1-\nu^2)n^2} \left( \frac{R}{L} \right) J + \text{const.}$$

$$A = \frac{\pi^3 \bar{q} E \delta^3}{8n^2 \epsilon} \left( \frac{R}{L} \right) \lambda + \text{const.}$$

Истинную форму оболочки в состоянии равновесия под нагрузкой  $q$  мы будем определять из условия минимума функционала  $J$  при условии стационарности  $\lambda$ . Для решения этой изопериметрической задачи применим приближенный метод решения, как и в случае осевого сжатия в § 1.

Функцию  $y(x)$ , реализующую минимум функционала  $J$ , мы будем искать в классе гладких функций, определяемых условиями

$$y'' = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \geq \alpha, \\ a & \text{при } |x| < \alpha. \end{cases}$$

где  $a$  и  $\alpha$  — варьируемые параметры. График такой функции представлен на рис. 43. Он состоит из параболы на участке

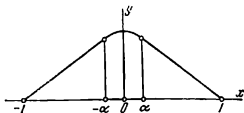


Рис. 43.

( $-\alpha, \alpha$ ) и двух гладко примыкающих к ней прямолинейных отрезков. Такой выбор функции  $y(x)$  подсказывается очевидной симметрией функции, реализующей минимум  $J$ , и обращением ее в нуль вместе со вторыми производными на концах интервала ( $-1, 1$ ).

Аналитическое выражение функции  $y(x)$  следующее:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{ax^2}{2} - \frac{aa^2}{2} + aa(1-a), & |x| \leq a, \\ aa(1-x), & |x| > a. \end{cases}$$

Можно показать, что для функции, реализующей минимум функционала  $J$ , значение параметра  $a$  мало вместе с  $\varepsilon$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 y'^2 dx &= 2aa^2, \\ \int_{-1}^1 y''^2 dx &= 2a^2a^2(1+*), \\ \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} dx &= 2a^{1/2}a, \\ \int_{-1}^1 y^2 dx &= \frac{2}{3} a^2a^2(1+*), \end{aligned}$$

где звездочкой обозначены выражения, имеющие подчиненное значение при малом  $a$ .

Подставляя значения полученных интегралов в выражения  $J$  и  $\lambda$  и игнорируя члены  $*$ , будем иметь

$$J = \frac{\pi\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{6}} 2aa^2 + 4va^2a^2 + 12(1-v^2) \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} a\sqrt{a},$$

$$\lambda = \frac{2}{3} a^2a^2.$$

Вводя в выражение  $J$  величину  $\lambda$  вместо  $a$ , получим  $J$  как функцию только одного параметра  $a$

$$J = (\pi\sqrt{\lambda\varepsilon})a + 6v\lambda + \left(12(1-v^2)c\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}\right)\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

При  $v=0,3$  и  $c=0,19$  будет

$$J = (\pi\sqrt{\lambda\varepsilon})a + 1,8\lambda + 2,5\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}}\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Легко видеть, что при варьировании по параметру  $a$

$$\min J = 5,1\epsilon^{-1/6} \sqrt{\lambda} - 1,8\lambda,$$

нимум достигается при

$$a = 0,54\epsilon^{-1/6}.$$

Для оболочки, находящейся в состоянии упругого равновесия,

$$\frac{dU}{d\lambda} = \frac{dA}{d\lambda}.$$

Принимая во внимание полученное выражение для  $\min J$ , отсюда находим величину внешнего давления  $\bar{q}$  в зависимости от общей деформации оболочки, которую мы характеризуем параметром  $\lambda$ :

$$\bar{q} = \epsilon \left( 0,95 \frac{\epsilon^{-1/6}}{\sqrt{\lambda}} + 0,67 \right), \quad \epsilon = \frac{R\delta}{L^2}.$$

Мы видим, что воспринимаемая оболочкой нагрузка уменьшается при увеличении деформации ( $\lambda$ ). Состояния равновесия оболочки неустойчивы. Это вполне согласуется с данными экспериментального исследования оболочек под внешним давлением: переход к закритическим деформациям оболочки в результате потери устойчивости происходит без увеличения внешней нагрузки.

Определим максимальную геометрически допустимую деформацию ( $\lambda$ ). Так как  $|y(x)|$  по смыслу не больше единицы, и  $\max y(x)$  достигается при  $x = 0$ , то

$$\left| -\frac{a\alpha^2}{2} + a\alpha(1 - \alpha) \right| \leq 1.$$

Величина

$$\lambda \simeq \frac{2}{3} a^2 \alpha^2.$$

Отсюда, принимая во внимание 'указанное неравенство, при малом  $\epsilon$  (следовательно, малом  $\alpha$ ), получаем

$$\max \lambda \simeq \frac{2}{3}.$$



Подставляя это значение  $\lambda$  в формулу для  $\bar{q}$ , получим значение нижней критической нагрузки

$$\bar{q}_i = \varepsilon (1,16\varepsilon^{-1/4} + 0,67), \quad \varepsilon = \frac{R\delta}{L^2}.$$

Итак, нижняя критическая нагрузка для шарнирно опертой по краям цилиндрической оболочки под внешним давлением определяется по формуле

$$q_l = \bar{q}_i E \frac{\delta^2}{R^2},$$

где

$$q_l = \varepsilon (1,16\varepsilon^{-1/4} + 0,67), \quad \varepsilon = \frac{R\delta}{L^2}.$$

$R$  — радиус оболочки,  $\delta$  — толщина,  $E$  — модуль упругости.

Сравнивая полученное значение  $\bar{q}_i$  с величиной верхней критической нагрузки

$$\bar{q}_e = 0,92 \sqrt{\varepsilon},$$

будем иметь

$$\bar{q}_i = \bar{q}_e (1,26\varepsilon^{1/2} + 0,73\varepsilon^{1/2}).$$

Отсюда видно, что при малом значении параметра  $\varepsilon$  (а мы предполагаем такую малость) нижняя критическая нагрузка неограниченно упругой оболочки может быть значительно меньше верхней критической нагрузки.

**3. Влияние начальной погиби оболочки на устойчивость при внешнем давлении.** Оболочки с ограниченной упругостью материала. Как и в случае осевого сжатия, несовершенство геометрической формы оболочки может повлиять на величину критического давления, при котором оболочка теряет устойчивость. Сейчас мы рассмотрим влияние начальной погиби оболочки на верхнюю критическую нагрузку при внешнем давлении. При этом мы будем исходить из предположения о том, что влияние начальной погиби будет наибольшим, когда она воспроизводит форму оболочки при за критической деформации.

Установим связь между параметром  $\lambda$ , характеризующим за критическую деформацию, и величиной  $\Delta$  максимального

поперечного прогиба оболочки при этой деформации. В исходных переменных  $x, y$  имеем

$$\Delta = \frac{\pi}{2n} y_{\max}.$$

После нормировки переменных по формулам

$$y = \frac{a}{2} \bar{y}, \quad x = \frac{L}{2} \bar{x},$$

получим

$$\Delta = \frac{\pi}{2n} \frac{a}{2} \bar{y}_{\max}.$$

Пусть параметр

$$\lambda = \int_{-1}^1 \bar{y}^2 d\bar{x}.$$

Ввиду специфической формы графика функции  $\bar{y}(x)$  (рис. 43), можно считать, что

$$\lambda \simeq \frac{2}{3} \bar{y}_{\max}^2.$$

Если сюда ввести вместо  $\bar{y}_{\max}$  прогиб  $\Delta$ , то получим

$$\lambda = \frac{32n^2 \Delta^2}{3\pi^2 a^2} = \frac{32n^4}{3\pi^4 R^2} \Delta^2$$

или, так как  $n$  определяется условием

$$\left(\frac{\pi R}{Ln}\right)^8 = \frac{\pi^4 \varepsilon^2}{36(1-\nu^2)},$$

$$\lambda = 6,1 \frac{\Delta^2 R}{L^2 \delta}.$$

Подставляя это значение  $\lambda$  в формулу для воспринимаемой оболочкой нагрузки при заданной деформации ( $\lambda$ ), получим оценку влияния начальной погиби величины  $\Delta$  на потерю устойчивости при внешнем давлении

$$\bar{q} = \varepsilon \left( 0,34e^{-1/6} \frac{L}{\Delta} \sqrt{\frac{\delta}{R}} + 0,67 \right).$$

Этой формулой, естественно, нельзя пользоваться при относительно малых значениях  $\Delta$ , так как ее вывод основан на

рассмотрении деформаций со значительным изменением формы оболочки.

Наши рассмотрения в п. 2 относились к неограниченно упругим оболочкам. Для оболочек с ограниченной упругостью материала они применимы только в том случае, когда рассматриваемые там деформации не приводят к напряжениям, выходящим за предел упругости материала оболочки. Выясним, каковы эти оболочки, то есть каким условиям должны удовлетворять их геометрические размеры и механические характеристики.

Максимальные напряжения  $\sigma$  на поверхности оболочки при закритической деформации возникают в зоне сильного местного изгиба и определяются по формуле

$$\sigma = c'E \left( \frac{1}{\rho} \right)^{1/2} \delta^{1/2} \alpha^{3/2}.$$

Для рассматриваемых деформаций

$$\alpha = \frac{\pi}{2n}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{2\pi R}{nL^2} |y''|,$$

$$\max \frac{1}{\rho} = \frac{2\pi R}{nL^2} \alpha.$$

В п. 2 показано, что параметр  $\alpha$  во все время закритической деформации сохраняет одно и то же постоянное значение

$$\alpha = 0,54\epsilon^{-2/3}, \quad \epsilon = \frac{R\delta}{L^2}.$$

Поэтому максимальные напряжения от изгиба на поверхности оболочки постоянны и равны

$$\sigma = c'E \left( \frac{2\pi R}{nL^2} 0,54\epsilon^{-2/3} \right)^{1/2} \delta^{1/2} \left( \frac{\pi}{2n} \right)^{3/2}.$$

Подставляя сюда значение  $n$ , определяемое соотношением

$$\left( \frac{\pi R}{nL} \right)^8 = \frac{\pi^4}{36(1-\nu^2)} \left( \frac{R\delta}{L^2} \right)^2,$$

получим

$$\sigma = 0,4E \frac{\delta}{R} \left( \frac{\delta R}{L^2} \right)^{-1/4}$$

Таким образом, рассмотрения п. 2 могут быть применены к оболочкам с ограниченной упругостью, в частности,

формулой для нижней критической нагрузки

$$\bar{q}_l = \varepsilon (1,16\varepsilon^{-1/4} + 0,67)$$

можно пользоваться, если напряжения величиной  $0,4E \frac{\delta}{R} \left(\frac{\delta R}{L^2}\right)^{-1/2}$  не вызывают пластических деформаций в материале оболочки. Мы будем считать это условие выполненным, если

$$0,4E \frac{\delta}{R} \left(\frac{\delta R}{L^2}\right)^{-1/2} < \sigma_0,$$

где  $\sigma_0$  — временное сопротивление материала оболочки.

Для того чтобы представить себе класс оболочек, к которым относится полученный результат, рассмотрим пример. Имеем

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, \quad \sigma_0 = 4 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2.$$

Предположим, что  $L \sim R$ . Тогда наше условие дает

$$\frac{R}{\delta} > 2800.$$

Таким образом, это довольно тонкие оболочки.

Рассмотрим теперь сравнительно толстые оболочки, то есть оболочки, для которых

$$\sigma_0 < 0,4E \frac{\delta}{R} \left(\frac{\delta R}{L^2}\right)^{-1/2}$$

Для таких оболочек, так же как в случае осевого сжатия минимизируя функционал  $J$ , мы должны соблюсти дополнительное условие: напряжения на поверхности оболочки в зоне сильного местного изгиба должны не превосходить временного сопротивления  $\sigma_0$ .

Ввиду того, что функция

$$J(a) = (\pi \sqrt{\varepsilon \lambda}) a + 1,8\lambda + 2,5 \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{a}}$$

имеет только один минимум, и при указанном дополнительном условии ее минимум достигаться не может, то при соблюдении этого условия будет

$$\min J = J(a_0),$$

где  $a_0$  определяется условием равенства

$$\sigma = \sigma_0,$$

то есть из соотношения

$$\sigma_a = c'E \left( \frac{2\pi R}{L^2 n} a \right)^{1/2} \delta^{1/2} \left( \frac{\pi}{2n} \right)^{1/2}$$

Отсюда

$$\sqrt{a} = \frac{2\sqrt{6}}{\pi c'} \frac{\sigma}{E} \frac{R}{\delta} = 1,75 \frac{\sigma R}{E\delta}.$$

Подставляя это значение  $\sqrt{a}$  в выражение функционала  $J$ , находим энергию деформации оболочки

$$U = \frac{\pi^3 E \delta^3}{24(1-\nu^2)} \left( \frac{R}{L} \right) \left\{ 9,6 \sqrt{\varepsilon} \left( \frac{\sigma_a R}{E\delta} \right)^2 \sqrt{\lambda} + \right. \\ \left. + 1,43 \left( \frac{E\delta}{\sigma_a R} \right) \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon}} + 1,8\lambda \right\}.$$

А теперь, как и в случае неограниченно упругих оболочек, из условия равновесия

$$\frac{dU}{d\lambda} = \frac{dA}{d\lambda}$$

находим величину воспринимаемой оболочкой нагрузки  $\bar{q}$  в зависимости от деформации:

$$\bar{q} = \varepsilon \left( 1,78 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\lambda}} \left( \frac{\sigma_a R}{E\delta} \right)^2 + 0,27 \left( \frac{E\delta}{\sigma_a R} \right) \frac{1}{\sqrt{\lambda \varepsilon}} + 0,67 \right).$$

Нижняя критическая нагрузка  $\bar{q}_l$  соответствует максимальному допустимому значению  $\lambda \cong 2/3$ . Следовательно,

$$\bar{q}_l = \varepsilon \left( 2,18 \sqrt{\varepsilon} \left( \frac{\sigma_a R}{E\delta} \right)^2 + 0,33 \left( \frac{E\delta}{\sigma_a R} \right) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 0,67 \right).$$

Для того чтобы сделать эту формулу лучше обозримой и компактной, введем параметр

$$\omega = 0,4 \frac{E\delta}{\sigma_a R} \varepsilon^{-1/2}.$$

Тогда

$$\bar{q}_l = \varepsilon \left\{ \left( \frac{0,35}{\omega^2} + 0,8\omega \right) \varepsilon^{-1/2} + 0,67 \right\}.$$

Эта формула относится к оболочкам, у которых параметр  $\omega > 1$ .

Вясним область применимости полученной формулы. Для этого заметим, что в начале нашего рассмотрения мы пред-

полагали параметр  $\alpha$  малым. Для неограниченно упругих оболочек это было следствием малости  $\varepsilon$ . В случае оболочек с ограниченной упругостью, чтобы воспользоваться результатами предыдущих рассмотрений, мы должны предположить малость  $\alpha$ . Это, конечно, ограничит класс рассматриваемых оболочек.

Имеем

$$\max \lambda = \frac{2}{3}.$$

Так как

$$\lambda = \frac{2}{3} \alpha^2 \alpha^2,$$

$$\alpha < \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\alpha}.$$

Подставляя с

$$a = \left(1.75 \frac{\sigma_a R}{E \delta}\right)^2,$$

получим

$$\alpha < 0.4 \left(\frac{E \delta}{\sigma_a R}\right)^2$$

Мы будем считать условие малости  $\alpha$  выполненным, если

$$\frac{E \delta}{\sigma_a R} \leq 1.$$

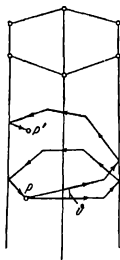
### § 3. Цилиндрические оболочки при кручении

Исследование закритических упругих состояний цилиндрической оболочки при кручении так же будет основано на применении принципа А (гл. 1, § 2). Согласно этому принципу определение закритических упругих состояний сводится к решению вариационной задачи для функционала  $U - A$  на изометрических преобразованиях исходной формы оболочки. В связи с этим мы начнем наше изложение с построения специальных, изометричных цилиндру, поверхностей, с помощью которых будем приближать форму оболочек при закритической деформации, связанной с кручением.

1. Специальное изометрическое преобразование цилиндрической поверхности. Возьмем правильную бесконечную призму с четным числом  $n$  граней. Пусть  $\alpha$  — одна из

граней призмы,  $l$  — ребро этой грани и  $\beta$  — плоскость, проходящая через ось призмы и ребро  $l$ . Обозначим через  $e$  единичный вектор, направленный по оси призмы, и через  $e'$  — вектор, перпендикулярный плоскости  $\beta$ . Представим себе, что из точки  $P$  грани  $\alpha$  исходит луч  $S$ , перпендикулярный плоскости  $\beta$ , который отражается от внутренних поверхностей граней. Нетрудно видеть, что этот луч после отражения от всех граней снова попадет в точку  $P$  (рис. 44). Траектория луча представляет собой многоугольник  $U_P$ , вписанный в сечение призмы, перпендикулярное оси. Периметр  $u$  многоугольника  $U_P$  не зависит от точки  $P$ .

Пусть теперь луч  $S$ , исходящий из точки  $P$ , имеет направление вектора  $e' + e \operatorname{tg} \vartheta$ . Такой луч после отражения от всех граней призмы попадет в некоторую точку  $P'$  грани  $\alpha$  (рис. 44). Траектория луча  $PP'$  представляет собой ломаную, звенья которой составляют с осью призмы постоянный угол  $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ . Проекция этой ломаной на сечение призмы плоскостью, перпендикулярной ее оси и проходящей через точку  $P$ , есть не что иное как многоугольник  $U_P$ . Отсюда следует, что расстояние между точками  $P$  и  $P'$  не зависит от точки  $P$  и равно  $u \operatorname{tg} \vartheta$ , где  $u$  — периметр многоугольника  $U_P$ .



Возьмем теперь на грани  $\alpha$  призмы бесконечную в обе стороны периодическую кривую  $\gamma$  с периодом  $u \operatorname{tg} \vartheta$  и проведем из каждой ее точки  $P$  луч  $S_P$ . Эти лучи образуют некоторую поверхность

$Z$  с ребрами на гранях призмы (рис. 45). Покажем, что эта поверхность изометрична цилиндру.

Действительно, пусть  $Z'$  и  $Z''$  — регулярные части поверхности  $Z$ , примыкающие по ребру  $\gamma'$ , лежащему в грани  $\alpha'$ . Поверхности  $Z'$  и  $Z''$  являются цилиндрическими. Продолжим образующие поверхности  $Z'$  за грань  $\alpha'$ . Тогда получим поверхность  $\bar{Z}'$ . Эта поверхность получается зеркальным отражением поверхности  $Z''$  относительно плоскости  $\alpha'$ . Отсюда следует, что поверхность, составленная из  $Z'$  и  $Z''$ , и поверхность, составленная из  $Z'$  и  $\bar{Z}'$ , в окрестности ребра  $\gamma'$

изометричны. А так как вторая поверхность, очевидно, локально изометрична плоскости в окрестности ребра  $\gamma'$ , то этим же свойством обладает и первая поверхность. Итак, поверхность  $Z$  локально изометрична плоскости всюду, в том числе и на ребрах. Так как поверхность  $Z$  полная, локально изометрична плоскости и топологически эквивалентна цилиндру, то она изометрична цилиндру. Утверждение доказано. В связи с предстоящими приложениями мы сейчас воспроизведем построение поверхности  $Z$  в несколько видоизмененной форме, удобной для использования.

Возьмем правильную  $n$ -угольную призму высоты  $L$  с периметром основания  $2\pi R$ . Пусть  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — две смежные грани призмы и  $AA'$  — боковое ребро, по которому они примыкают. Проведем радиальную плоскость  $\beta$  через ребро  $AA'$  и построим плоскость  $\alpha$ , параллельную оси призмы и делящую грани  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  пополам (рис. 46, а).

Введем в плоскости  $\beta$  прямоугольные декартовы координаты  $x$ ,  $y$ , приняв за ось  $x$  прямую, по которой



Рис. 45.

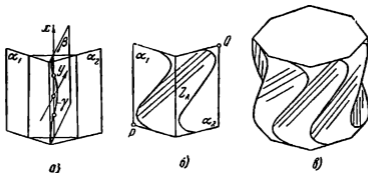


Рис. 46.

пересекаются плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , а за начало координат — середину отрезка этой прямой внутри призмы. Пусть  $\gamma$  — кривая в плоскости  $\beta$ , задаваемая уравнением

$$y = y(x),$$



где  $y(x)$  -- функция, удовлетворяющая условия

$$1) y(x) = y(-x),$$

$$2) y\left(x \pm \frac{L}{4}\right) = -y\left(\pm \frac{L}{4} - x\right).$$

Проведем через кривую  $\gamma$  цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными отрезку  $PQ$ , соединяющему вершины  $P$  и  $Q$  граней  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (рис. 46, б). Часть этой поверхности, расположенную внутри призмы, обозначим  $Z_A$ . Она ограничена кривыми  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , лежащими в гранях  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  соответственно. Ввиду условий 1) и 2), наложенных на функцию  $y(x)$ , кривая  $\gamma_1$  после поворота около оси призмы на угол  $2\pi/n$  в соответствующем направлении совмещается с кривой  $\gamma_2$ . Отсюда следует, что если мы для каждой пары смежных граней призмы указанным способом построим цилиндрическую поверхность  $Z_A$ , то они образуют замкнутую поверхность  $Z$  (рис. 46, в). Построенная так поверхность  $Z$  изометрична цилиндру.

Вычислим некоторые величины для поверхности  $Z$ , используемые в дальнейшем. Ввиду того, что поверхность  $Z$  составлена из частей, конгруэнтных  $Z_A$ , мы можем ограничиться рассмотрением только этого куска.

Прежде всего, мы замечаем, что при значительном  $n$  для угла  $\vartheta$  между образующими поверхности  $Z_A$  и осью призмы имеем

$$\vartheta \simeq \frac{4\pi R}{nL}.$$

Найдем нормальную кривизну поверхности  $Z_A$  в направлении, перпендикулярном ее образующим. Кривизна в радиальном сечении равна

$$k_r \simeq y'',$$

так как  $y'^2 + 1 \simeq 1$ . Отсюда по формуле Эйлера нормальная кривизна поверхности  $Z_A$  в направлении, перпендикулярном образующим, будет

$$k \simeq \frac{y''}{\vartheta^2}.$$

Определим кривизну ребер  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , ограничивающих область  $Z_A$  на поверхности  $Z$ . Для этого дополним систему координат  $x, y$  в плоскости  $\beta$  до пространственной системы

координат  $x, y, z$ . Тогда уравнение поверхности  $Z_A$  будет

$$x = u + v \cos \vartheta,$$

$$y = y(u),$$

$$z = v \sin \vartheta.$$

Грани призмы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , в которых лежат кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , задаются уравнениями

$$\pm y = \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right) z + \operatorname{const}.$$

Кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , как пересечения поверхности  $Z_A$  с гранями призмы, задаются соответствующей системой четырех уравнений.

Принимая  $u$  за параметр вдоль кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , находим

$$x' = 1 \pm \frac{y'}{\operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}, \quad y' = y'(u), \quad z' = \pm \frac{y'}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}},$$

$$x'' = \pm \frac{y''}{\operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}, \quad y'' = y''(u), \quad z'' = \pm \frac{y''}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}.$$

При малых  $\pi/n$  и  $\vartheta$  для кривизны  $\kappa$  кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  получается формула

$$\kappa = \frac{n |y''|}{\pi \left\{ \left( 1 \pm \frac{y'n}{\pi \vartheta} \right)^2 + \frac{y'^2 n^2}{\pi^2} \right\}^{3/2}}.$$

Найдем угол  $\varphi$ , образуемый касательными плоскостями поверхности  $Z_A$  с плоскостями кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , то есть гранями призмы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Нормали к плоскостям граней призмы имеют угловые коэффициенты

$$0, \pm 1, -\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

Угловые коэффициенты нормали к поверхности  $Z_A$  равны

$$y' \sin \vartheta, -\sin \vartheta, -y' \cos \vartheta.$$

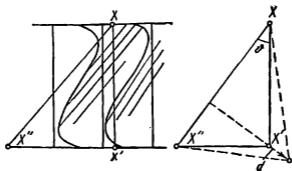
Отсюда для угла  $\varphi$  получается выражение

$$\varphi = \frac{\pi}{n} \left\{ \left( 1 \pm \frac{y'n}{\pi \vartheta} \right)^2 + \frac{y'^2 n^2}{\pi^2} \right\}^{1/2}$$

Элемент дуги кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  равен

$$ds = \left\{ \left( 1 \pm \frac{y'n}{\pi\phi} \right)^2 + \frac{y'^2 n^2}{\pi^2} \right\}^{1/2} du.$$

Возьмем две точки  $X$  и  $X'$  на кривых, ограничивающих поверхность  $Z$ , и расположенные на одной вертикали (рис. 47).



Если поверхность  $Z$  изометрически наложить на исходную цилиндрическую поверхность, то точки  $X$  и  $X'$  не будут находиться на одной образующей. Найдем угловое смещение точки  $X$  относительно  $X'$  при таком наложении.

Продолжим по периодичности поверхность  $Z_A$  за линию  $\gamma_1$ . Пусть  $X''$  — второй конец прямолинейной образующей, исходящей из точки  $X$  (рис. 47). Треугольник  $XX'X''$  — прямоугольный с прямым углом в точке  $X'$ . Если мы будем разворачивать нашу цилиндрическую поверхность на плоскость треугольника  $XX'X''$ , фиксируя точки  $X$  и  $X''$ , то  $X'$  переместится в направлении высоты треугольника на некоторое расстояние  $d$ . При этом расстояние между точками  $X$  и  $X'$  увеличится на величину

$$\Delta h = d \sin \vartheta,$$

а интересующее нас смещение точки  $X'$  относительно  $X$  будет

$$\delta = 2d \cos \vartheta.$$

Для величины  $\Delta h$  мы можем получить выражение с помощью функции  $y(x)$ , задающей кривую  $\gamma$ , через которую проходит поверхность  $Z_A$ . Именно, так как  $\Delta h$  есть раз-

ность между расстоянием точек  $X$  и  $X'$  на поверхности  $Z_A$  и в пространстве, то

$$\Delta h \simeq \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} y'^2 dx.$$

Отсюда для величины смещения  $X$  относительно  $X'$  получается следующее выражение:

$$\delta = \frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta} \int_{-L/2}^{L/2} y'^2 dx,$$

или, так как угол  $\vartheta$  мал, то

$$\delta = \frac{1}{\vartheta} \int_{-L/2}^{L/2} y'^2 dx.$$

По величине линейного смещения  $\delta$  можно найти угловое смещение

$$\omega = \frac{\delta}{R} = \frac{1}{R\vartheta} \int_{-L/2}^{L/2} y'^2 dx.$$

Угол  $\omega$  мы будем называть углом закручивания цилиндрической поверхности при изгибании ее в поверхность  $Z$ .

**2. Выражение для функционала  $W(Z)$ .** Определение упругого состояния оболочки при закритической деформации сводится к рассмотрению вариационной задачи для функционала

$$W(Z) = U - A,$$

где  $U$  — энергия деформации оболочки,  $A$  — производимая внешней нагрузкой работа. Найдем выражение  $U$  и  $A$  для изометрических преобразований исходной цилиндрической поверхности в форму  $Z$ . Энергия деформации

$$U = U_z + U_\gamma,$$

где  $U_z$  — энергия изгиба по основной поверхности,  $U_\gamma$  — энергия деформации вдоль ребер. Энергия  $U_z$  на единицу

площади поверхности оболочки вычисляется по формуле

$$\bar{U}_Z = \frac{E\delta^3}{24(1-\nu^2)} (\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2 + 2\nu \Delta k_1 \Delta k_2).$$

где  $\Delta k_1$  и  $\Delta k_2$  — экстремальные изменения нормальных кривизн при переходе от исходной цилиндрической поверхности к поверхности  $Z$ . Ввиду малости угла  $\vartheta$  можно считать, что

$$\Delta k_1 \simeq k - \frac{1}{R}, \quad \Delta k_2 = 0,$$

где  $k$  — нормальная кривизна поверхности  $Z$  в направлении, перпендикулярном ее образующим, а  $R$  — радиус исходной оболочки.

Так как поверхность  $Z$  составлена из  $n$  конгруэнтных областей  $Z_A$ , то

$$U_Z = \int\int_Z \bar{U} dS = n \int\int_{Z_A} \bar{U} dS.$$

Обозначая  $b(x)$  длину отрезка образующей поверхности  $Z_A$ , проходящей через точку  $(x)$  кривой  $\gamma$ , при малых  $\vartheta$  и  $\pi/n$  будем иметь

$$\int\int_{Z_A} \bar{U} ds \simeq \frac{E\delta^3\vartheta}{24(1-\nu^2)} \int_{-L/2}^{L/2} b(x) \left(k(x) - \frac{1}{R}\right)^2 dx.$$

Длина отрезка образующей

$$b(x) = \left(\frac{a}{2} \sin \frac{\pi}{n} + y(x)\right) \frac{2}{\sin \vartheta \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}.$$

Принимая во внимание малость величин  $\pi/n$  и  $\vartheta$ , а также выражение для  $a = 2\pi R/n$ , получим

$$b(x) = \left(\frac{\pi^2 R}{n^2} + y(x)\right) \frac{2n}{\pi \vartheta}.$$

Отсюда

$$\int\int_{Z_A} \bar{U} ds = \frac{nE\delta^3}{12\pi(1-\nu^2)} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{\pi^2 R}{n^2} + y(x)\right) \left(\frac{y''}{\vartheta^2} - \frac{1}{R}\right)^2 dx.$$

Ввиду условий 1) и 2), которым удовлетворяет функция  $y(x)$  (см. п. 1), можем записать

$$\int_{-L/2}^{L/2} y y''^2 dx = 0, \quad \int_{-L/2}^{L/2} y'' dx = 0, \quad \int_{-L/2}^{L/2} y dx = 0,$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} y'' y dx = - \int_{-L/2}^{L/2} y'^2 dx.$$

Поэтому

$$\int_{Z_A} \int \bar{U} dS = \frac{\pi ER \delta^3}{12n(1-\nu^2)\vartheta^4} \int_{-L/2}^{L/2} y''^2 dx +$$

$$+ \frac{nE\delta^3}{6\pi(1-\nu^2)R\vartheta^2} \int_{-L/2}^{L/2} y'^2 dx + \text{const.}$$

Итак, энергия изгиба по основной поверхности оболочки равна

$$U_Z = \frac{\pi ER \delta^3}{12(1-\nu^2)\vartheta^4} \int_{-L/2}^{L/2} y''^2 dx +$$

$$+ \frac{n^2 E \delta^3}{6\pi(1-\nu^2)R\vartheta^2} \int_{-L/2}^{L/2} y'^2 dx + \text{const.}$$

Вычислим теперь энергию  $U_\gamma$ . Имеем

$$U_\gamma = U_\gamma^0 + \Delta U_\gamma,$$

$$U_\gamma^0 = n \int_\gamma c E \delta^{3/2} \varphi^{3/2} \kappa^{1/2} ds_\gamma,$$

$$\Delta U_\gamma = n \frac{E \delta^3}{12(1-\nu^2)} \int_\gamma \varphi (-2k_n + k_e + k_t) ds_\gamma.$$

Здесь  $\varphi$  — угол между плоскостью кривой  $\gamma$  и касательными плоскостями поверхности  $Z$  вдоль этой кривой,  $k_e$  и  $k_t$  — нормальные кривизны поверхности  $Z$  в направлении, перпендикулярном ребру, а  $k_n$  — нормальная кривизна исходной цилиндрической поверхности в соответствующем направлении. Начнем с определения величины  $\Delta U_\gamma$ .

Из построения поверхности  $Z$  следует, что нормальные кривизны  $k_e$  и  $k_l$  равны по величине и имеют противоположные знаки. Поэтому  $k_l + k_e = 0$ , и, следовательно,

$$\Delta U_\gamma = n \frac{E\delta^3}{6(1-\nu^2)} \int_\gamma \varphi k_n ds_\gamma.$$

Если обозначить через  $\alpha$  угол между касательной к кривой  $\gamma$  и направлением оси призмы, то

$$k_n \simeq \frac{1}{R} \cos^2 \alpha.$$

Нетрудно получить выражение для угла  $\alpha$ , исходя из уравнения кривой  $\gamma$ . При малых  $\pi/n$  и  $\vartheta$  имеем

$$\cos^2 \alpha = \frac{\left(1 \pm \frac{y'n}{\pi\vartheta}\right)^2}{\left(1 \pm \frac{y'n}{\pi\vartheta}\right)^2 + \frac{y'^2 n^2}{\pi^2}}.$$

Угол

$$\varphi = \frac{\pi}{n} \left( \left(1 \pm \frac{y'n}{\pi\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{y'n}{\pi}\right)^2 \right)^{1/2}.$$

Элемент дуги кривой  $\gamma$  равен

$$ds_\gamma = \left( \left(1 \pm \frac{y'n}{\pi\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{y'n}{\pi}\right)^2 \right)^{1/2} dx.$$

Подставляя эти значения в формулу для  $\Delta U_\gamma$ , получим

$$\Delta U_\gamma = - \frac{n^2 E \delta^3}{6\pi(1-\nu^2) R \vartheta^2} \int_{-L/2}^{L/2} y'^2 dx.$$

Вычислим теперь  $U_\gamma^0$ . Подставляя значения  $\varphi$ ,  $\kappa$  и  $ds_\gamma$  в формулу для  $U_\gamma^0$ , будем иметь для одного ребра  $\gamma_i$

$$\begin{aligned} U_{\gamma_i}^0 &= \int_{-L/2}^{L/2} c E \delta^{1/2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 |y''|^{1/2} \left( \left(1 \pm \frac{y'n}{\pi\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{y'n}{\pi}\right)^2 \right) dx = \\ &= \int_{-L/2}^{L/2} c E \delta^{1/2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 |y''|^{1/2} \left( 1 + \left(\frac{y'n}{\pi\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{y'n}{\pi}\right)^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Ввиду малости  $\vartheta$  будет

$$\left(\frac{y'n}{\pi\vartheta}\right)^2 \gg \left(\frac{y'n}{\pi}\right)^2$$

Поэтому можно считать, что

$$U_{V_i}^0 = \int_{-L/2}^{L/2} cE\delta^{3/2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{1/2} |y''|^{1/2} \left(1 + \left(\frac{y'n}{\pi\vartheta}\right)^2\right) dx.$$

Энергия, связанная с местным изгибом, по всем ребрам поверхности  $Z$  равна

$$U_V^0 = cnE\delta^{3/2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \int_{-L/2}^{L/2} |y''|^{1/2} \left(1 + \left(\frac{y'n}{\pi\vartheta}\right)^2\right) dx.$$

Складывая полученные формулы для  $U_Z$ ,  $U_V^0$  и  $\Delta U_V$ , находим полную энергию закрученной оболочки

$$U = \frac{\pi ER\delta^3}{12(1-\nu^2)\vartheta^4} \int_{-L/2}^{L/2} y'^2 dx + \\ + cnE\delta^{3/2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \int_{-L/2}^{L/2} |y''|^{1/2} \left(1 + \left(\frac{y'n}{\pi\vartheta}\right)^2\right) dx + \text{const.}$$

Отсюда, принимая во внимание условия 1) и 2) для функции  $y(x)$ , получим

$$U = \frac{\pi ER\delta^3}{6(1-\nu^2)\vartheta^4} \int_{-L/4}^{L/4} y'^2 dx + \\ + 2cnE\delta^{3/2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \int_{-L/4}^{L/4} |y''|^{1/2} \left(1 + \left(\frac{y'n}{\pi\vartheta}\right)^2\right) dx + \text{const.}$$

Введем безразмерные переменные  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ , полагая

$$x = \frac{L\bar{x}}{4}, \quad y = \frac{a}{2} \sin \frac{\pi}{n} \bar{y} \simeq \frac{\pi^2 R}{n^2} \bar{y}.$$



В новых переменных  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ , черту над которыми мы будем опускать, имеем

$$U = \frac{\pi E \delta^3}{24(1-\nu^2)} \left(\frac{L}{R}\right) \int_{-1}^1 y'^2 dx + \\ + 2\pi c E \delta^{3/2} R^{1/2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} (1+y'^2) dx + \text{const.}$$

Угол закручивания оболочки в новых переменных равен

$$\omega = 2 \left(\frac{\pi}{n}\right)^3 \int_{-1}^1 y'^2 dx.$$

Так же как и в предыдущих рассмотренных, мы исходим из предположения о том, что периодичность прогибов оболочки при закритических деформациях определяется периодичностью прогибов в момент потери устойчивости. Поэтому параметр  $n$ , входящий в выражение энергии деформации, мы определим из рассмотрения потери устойчивости оболочки.

Пусть шарнирно опертая по краям цилиндрическая оболочка радиуса  $R$ , длины  $L$  и толщины  $\delta$  находится под действием равномерно распределенного по краям касательного усилия  $s$ . Введем на поверхности оболочки криволинейные координаты  $x, y$ , так, как это делалось в предыдущих рассмотренных, и обозначим через  $w(x, y)$  радиальный прогиб оболочки в момент потери устойчивости. Функция  $w(x, y)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{D}{\delta} \Delta \Delta \Delta \Delta w + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2s \Delta \Delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0.$$

В линейной теории оболочек для прогиба  $w(x, y)$  обычно принимают выражение вида

$$w = c \sin \frac{\pi x}{L} \cos \left( \frac{n(y - \gamma x)}{R} \right).$$

Если это выражение подставить в уравнение для  $w$ , то мы получим два соотношения для величин  $n, \gamma$  и  $s$ . Наименьшее

значение  $s$ , определяемое этими соотношениями, равно

$$s_e \simeq 0,8E \frac{\delta}{R} \left( \frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/4}$$

и оно представляет собой верхнюю критическую нагрузку. Это значение  $s$  получается при

$$\gamma = \bar{\gamma} \varepsilon^{1/4}, \quad n = \frac{\pi R}{\bar{\xi} L} \varepsilon^{-1/4},$$

$$\bar{\gamma} \simeq 1,8, \quad \bar{\xi} \simeq 0,75, \quad \varepsilon = \frac{R\delta}{L^2}.$$

Подставляя найденное значение  $n$  в выражение энергии деформации и угла закручивания, получим для них следующие окончательные выражения:

$$U = \frac{\pi E \delta^3}{24(1-\nu^2)} \left( \frac{L}{R} \right) \int_{-1}^1 y'^2 dx + \\ + 2\pi c \bar{\xi}^2 E \delta^3 \left( \frac{L}{R} \right) \int_{-1}^1 |y'|^{1/2} (1+y'^2) dx + \text{const}, \\ \omega = 2\bar{\xi}^3 \left( \frac{L}{R} \right)^3 \left( \frac{R\delta}{L^2} \right)^{3/4} \int_{-1}^1 y'^2 dx.$$

### 3. Исследование закритических деформаций оболочки.

При  $\bar{\xi} = 0,75$  имеем

$$U = \frac{\pi E \delta^3}{24(1-\nu^2)} \left( \frac{L}{R} \right) J(y), \quad \omega = 2 \cdot 0,75^3 \left( \frac{L}{R} \right)^3 \left( \frac{R\delta}{L^2} \right)^{3/4} \lambda(y),$$

где

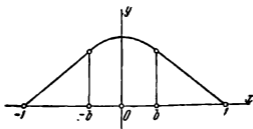
$$J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 4,35 |y'|^{1/2} (1+y'^2)) dx, \\ \lambda(y) = \int_{-1}^1 y'^2 dx.$$

Функцию  $y(x)$ , задающую форму оболочки при закритической деформации, мы будем определять из условия

минимума энергии упругой деформации  $U$  при заданном угле закручивания  $\omega$ , то есть из условия минимума  $J(y)$  при  $\lambda(y) = \text{const}$ . Решение этой вариационной задачи будем искать среди функций  $y(x)$ , удовлетворяющих условиям:

- 1)  $y(-1) = y(1) = 0$ ;
- 2)  $y''(x) = a$  при  $|x| < b < 1$ ;
- 3)  $y''(x) = 0$  при  $|x| \geq b$ .

где  $a$  и  $b$  — варьируемые параметры. Графически функция  $y(x)$  представлена на рис. 48. График состоит из двух прямоли-



•Рис. 48.

нейных отрезков, гладко примыкающих к параболе. Аналитически функция  $y(x)$  задается уравнениями:

$$\begin{aligned} y(x) &= abx - ab && \text{при } x \geq b, \\ y(x) &= -abx - ab && \text{при } x \leq -b, \\ y(x) &= \frac{ax^2}{2} - \frac{ab^2}{2} - ab && \text{при } |x| < b. \end{aligned}$$

Для интегралов, входящих в  $J(y)$  и  $\lambda(y)$ , получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 y'^2 dx &= 2a^2b, & \int_{-1}^1 y'^2 dx &= 2a^2b^2 - \frac{4}{3}a^2b^3, \\ \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} (1 + y'^2) dx &= 2a^{1/2}b + \frac{2}{3}a^{3/2}b^3. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в  $J$  и  $\lambda$ , получим

$$J = 2a^2b + 4,35 \left( 2a^{1/2}b + \frac{2}{3} a^{3/2}b^3 \right),$$

$$\lambda = 2a^2b^2 - \frac{4}{3} a^2b^3.$$

Задачу о минимуме  $J$  при условии  $\lambda = \text{const}$  мы решим численно. Именно, фиксировав  $\lambda$ , задаемся различными значениями параметра  $b$ , из условия  $\lambda = \text{const}$  находим соответствующие им значения  $a$ , затем вычисляем  $J$  и определяем его наименьшее значение.

При таком решении задачи естественно возникает вопрос о том, каковы допустимые значения  $\lambda$ . Чтобы решить этот вопрос, заметим, что безразмерное переменное  $y$  по смыслу не превосходит единицы по модулю. А так как

$$\max |y| = -\frac{ab^2}{2} + ab,$$

$$-\frac{ab^2}{2} + ab \leq 1,$$

$$\lambda < \left( 2 - \frac{4}{3}b \right) \frac{1}{\left( 1 - \frac{b}{2} \right)^2} < 2,7.$$

Указанным выше способом при значениях  $\lambda$  из интервала  $1 \leq \lambda \leq 2,8$ , через каждые 0,2 были найдены значения  $\min J$ . При этом оказалось, что значение переменного  $b$ , для которого в указанном интервале значений  $\lambda$  достигался минимум  $J$ , практически не изменяется, и оно равно  $\simeq 0,3$ .

Подставляя значения  $b = 0,3$  в выражения  $J$  и  $\lambda$ , получим

$$\lambda = 0,144a^2, \quad J = 0,6a^2 + 4,35a^{1/2}(0,6 + 0,018a^2).$$

Откуда

$$J = 4,15\lambda + 7,1\lambda^{1/4}(0,6 + 0,125\lambda).$$

Установим связь между общей деформацией оболочки, которая характеризуется параметром  $\lambda$ , и воспринимаемой оболочкой нагрузкой. Условие равновесия оболочки —

$$\frac{dU}{d\lambda} = \frac{dA}{d\lambda},$$

где  $U(y)$  — энергия деформации,  $A$  — производимая внешней нагрузкой работа. Энергия деформации —

$$U = \frac{\pi E \delta^3}{24(1-\nu^2)} \left(\frac{L}{R}\right) J.$$

Найдем работу  $A$ . Имеем

$$A = 2\pi R \delta s \omega R.$$

Подставляя сюда значения

$$s = \bar{s} E \frac{\delta}{R}, \quad \omega = 2 \cdot 0,75^3 \left(\frac{L}{R}\right)^3 \left(\frac{R\delta}{L^2}\right)^{1/4} \lambda,$$

получим

$$A = 1,7\pi \bar{s} E \delta^3 \left(\frac{L}{R}\right) \left(\frac{R\delta}{L^2}\right)^{-1/4} \lambda.$$

Теперь из условия равновесия находим интересующую нас связь между нагрузкой и деформацией

$$\bar{s} = 0,0272 (4,15 + 1,06\lambda^{-1/4} + 1,1\lambda^{1/4}) \left(\frac{R\delta}{L^2}\right)^{1/4}$$

Легко видеть, что функция  $\bar{s}(\lambda)$  монотонно убывает при  $\lambda < 2,9$ , следовательно, и при всех допустимых значениях  $\lambda$ . Это вполне соответствует характеру перехода к закритическим деформациям.

Найдем наименьшее значение  $\bar{s}$ . Имеем

$$\lambda \ll \left(2 - \frac{4}{3}b\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{b}{2}\right)^2}.$$

При  $b = 0,3$  величина  $\lambda \ll 2,2$ . Поэтому

$$\text{in } s = 0,18 \left(\frac{R\delta}{L^2}\right)^{1/4}.$$

Таким образом, *наименьшая воспринимаемая оболочкой нагрузка при закритической деформации, то есть нижняя критическая нагрузка, определяется по формуле*

$$s_l = 0,18 E \frac{\delta}{R} \left(\frac{R\delta}{L^2}\right)^{1/4}$$

и составляет примерно четверть верхней критической нагрузки

$$s_e = 0,8E \frac{\delta}{R} \left( \frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/4}.$$

Все наши рассуждения до сих пор относились, строго говоря, только к неограниченно упругим оболочкам, так как мы не учитывали того обстоятельства, что в зоне сильного местного изгиба возможны неупругие деформации. Поэтому для реальных оболочек, т. е. оболочек, обладающих ограниченной упругостью, полученные результаты применимы только при соблюдении некоторых условий. Найдем эти условия.

Для максимальных напряжений  $\sigma$  в зоне сильного местного изгиба мы имеем формулу

$$\sigma = c'E\delta^{1/2}\varphi^{1/2}\kappa^{1/2}.$$

Подставляя сюда значения  $\varphi$  и  $\kappa$ , получим

$$\sigma = c'E\delta^{1/2} \left( \frac{\pi}{n} \right) |y''|^{1/2}$$

в безразмерных переменных  $x$ ,  $y$ ,

$$\sigma = c'E \left( \frac{\pi}{n} \right)^2 (16 |y''|)^{1/2} \left( \frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/2}$$

Определяя значение параметра  $n$  из соотношения

$$\frac{\pi R}{Ln} = \bar{\xi} \left( \frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/4}, \quad \bar{\xi} \simeq 0,75,$$

получим

$$\sigma = 2,1E \frac{\delta}{R} |y''|^{1/2}.$$

Наибольшее значение  $|y''| = a$  получается при наибольшем значении  $\lambda = 2,2$  и определяется из условия

$$\lambda = 0,144a^2.$$

Отсюда  $a = 3,8$ , и, следовательно,

$$\sigma \simeq 4E \frac{\delta}{R}.$$

Итак, наши рассуждения относятся только к таким оболочкам с ограниченной упругостью материала, у которых

напряжения величиной  $4E\delta/R$  не вызывают пластических деформаций. Мы будем считать это условие выполненным, если

$$4E \frac{\delta}{R} < \sigma_0.$$

где  $\sigma_0$  — временное сопротивление материала.

Пример. Для оболочки из стали  $E = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>,  $\sigma_0 = 4 \cdot 10^3$  кг/см. Наше условие сводится к тому, чтобы

$$\frac{R}{\delta} > 2000.$$

Таким образом, речь идет об очень тонких оболочках.

Теперь мы рассмотрим закритические деформации сравнительно толстых оболочек, то есть оболочек, удовлетворяющих условию

$$\sigma_0 < 4E \frac{\delta}{R}.$$

Для таких оболочек деформации, рассматриваемые выше, приводят к напряжениям в зоне сильного местного изгиба, выходящим за предел упругости материала. В связи с этим по соображениям, которые уже приводились в предыдущих параграфах, минимизируя функционал  $J$  при  $\lambda = \text{const}$ , мы должны поставить как дополнительное требование соблюдение условия  $\sigma \leq \sigma_0$ , где  $\sigma$  — напряжения в зоне сильного местного изгиба.

Мы нашли для напряжений изгиба выражение

$$\sigma = 2,1E \frac{\delta}{R} \sqrt{a}.$$

Отсюда следует, что при значительных деформациях сравнительно толстых оболочек параметр  $a$  сохраняет постоянное значение, именно,

$$a = \left( \frac{1}{2,1} \frac{\sigma_0 R}{E\delta} \right)^2$$

Для таких деформаций минимум функционала

$$J = 2a^2b + 4,35 \left( 2a^{1/2}b + \frac{2}{3} a^{1/2}b^3 \right)$$

получается при подстановке значения

$$a = \left( \frac{1}{2,1} \frac{\sigma_s R}{E \delta} \right)^2$$

и значения  $b$ , которое при указанном значении  $a$  определяется равенством

$$\lambda = 2a^2 b^2 - \frac{4}{3} a^2 b^3.$$

Из условия равновесия

$$\frac{dU}{d\lambda} = \frac{dA}{d\lambda}$$

находим связь между деформацией  $\lambda$  и воспринимаемой нагрузкой  $\bar{s}$ . Именно,

$$\bar{s} = 0,0272 \frac{dJ}{d\lambda}.$$

Минимизируя  $s$  по параметру деформации, находим его значение  $\bar{s}_l$ , отвечающее нижней критической нагрузке. На рис. 49 графически представлена зависимость  $\bar{s}_l$  от упруго-пластических свойств материала.

Изложение этого параграфа можно резюмировать следующим выводом.

*Воспринимаемая оболочкой нагрузка при кручении в ходе за критической деформации уменьшается. Если геометрические параметры оболочки и механические*

*характеристики материала удовлетворяют условию*

$$4E \frac{\delta}{R} \leq \sigma_s,$$

*то наименьшая воспринимаемая оболочкой нагрузка, то есть нижняя критическая нагрузка, определяется по формуле*

$$s_l = 0,18E \frac{\delta}{R} \left( \frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/4}.$$

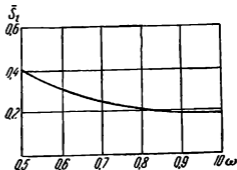


Рис. 49.



Если же указанное условие не выполняется, то есть если

$$4E \frac{\delta}{R} > \sigma_0,$$

то

$$s_l = \bar{s}_l E \frac{\delta}{R} \left( \frac{R\delta}{L^2} \right)^{1/4},$$

где коэффициент  $\bar{s}_l$  зависит от параметра

$$\omega = \frac{1}{4} \frac{\sigma_0 R}{E\delta}.$$

Эта зависимость представлена на рис. 49.

---

## ДОПОЛНЕНИЕ I

### НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИНАМИКИ

Методы исследования закритических упругих состояний оболочек при статическом нагружении, развитые в гл. 1, 2, 3, могут быть использованы также при решении задач динамики. В настоящем Дополнении применение этих методов иллюстрируется на конкретных задачах об устойчивости оболочек при динамическом нагружении, а также при исследовании колебаний с большой амплитудой.

#### § 1. Строго выпуклые оболочки при динамическом нагружении

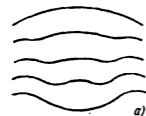
Мы будем рассматривать пологую строго выпуклую оболочку, жестко закрепленную по краю. Такая оболочка под внешним давлением  $q_0$ , большим критического ( $p_e$ ), теряет устойчивость и начинает выпучиваться. Процесс выпучивания быстро прогрессирует и приводит к полному прощелкиванию оболочки, которое сопровождается «хлопком». Изучению динамики этого процесса будет посвящен п. 1.

Если на оболочку, находящуюся под внешним давлением  $q_0$ , меньшим критического, действует кратковременная нагрузка  $q$ , гораздо большая критической, то потеря устойчивости оболочки, вызванная нагрузкой  $q$ , благодаря нагрузке  $q_0$  может также привести к прощелкиванию оболочки. Определение минимального импульса  $q\tau$ , способного вызвать прощелкивание оболочки, находящейся под давлением  $q_0$ , будет дано в п. 2.

**1. Динамика «хлопка» при равномерном нагружении оболочки.** Представим себе достаточно пологую строго выпуклую оболочку, жестко закрепленную по краю, на

которую действует равномерно распределенное внешнее давление  $p > p_0$ . Под этим давлением оболочка выпучивается и, таким образом, приходит в движение. Процесс деформации оболочки завершается полным прощелкиванием оболочки с характерным «хлопком». Задача, которую мы хотим рассмотреть, заключается в изучении деформации оболочки по времени, в частности в выяснении физической причины «хлопка».

Качественно процесс деформации оболочки мы будем представлять себе так, как это изображено на рис. 50, *а*, где



даны нормальные сечения оболочки в последовательные моменты времени. На рис. 50, *б* тот же процесс представлен схематически соответственно принятому нами способу приближения формы оболочки. Деформацию оболочки к моменту  $t$  мы представляем себе в виде двукратного зеркального выпучивания (рис. 50, *в*). Оно состоит в зеркальном отражении сегмента оболочки относительно плоскости  $\alpha$ , близкой к краю, с последующим отражением относительно плоскости  $\beta$ .

Для того чтобы определить движение оболочки в процессе рассматриваемой деформации, воспользуемся вариационным принципом Гамильтона—Остроградского, согласно которому вариация функционала

Рис. 50.

$$J = \int W dt, \quad W = K - U + A,$$

равна нулю. Здесь  $K$  — кинетическая энергия движения,  $U$  — энергия деформации оболочки,  $A$  — работа, производимая внешним давлением  $p$ . Поскольку нас интересует вопрос о физической причине «хлопка», мы ограничимся изучением движения в заключительной стадии, где наблюдается явление «хлопка».

Определим значения слагаемых  $K$ ,  $U$  и  $A$  в подынтегральном выражении  $W$ . Начнем с энергии деформации  $U$ . Если плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , определяющие зеркальное выпучивание,

достаточно удалены друг от друга (а нас интересует сейчас именно этот случай), то

$$U = \pi c E \delta^{3/2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (2h)^{3/2} + (*),$$

где  $h$  — высота сегмента, отсекаемого плоскостью  $\beta$ ,  $R_1$  и  $R_2$  — главные радиусы кривизны в центре выпучивания,  $\delta$  — толщина оболочки. Знаком  $(*)$  обозначено аналогичное слагаемое, отвечающее плоскости  $\alpha$ . В нашем предположении о характере рассматриваемой деформации это выражение стационарно, а поэтому оно несущественно.

Работа  $A$ , производимая внешним давлением  $p$  при деформации оболочки, с точностью до несущественного слагаемого, которое мы также будем обозначать  $(*)$ , определяется по формуле

$$A = -2pV + (*),$$

где  $V$  — объем сегмента, отсекаемого плоскостью  $\beta$ ,

$$V = \pi h^2 \sqrt{R_1 R_2}.$$

Кинетическая энергия движения оболочки равна

$$K = \frac{1}{2} S \delta \gamma (2h')^2,$$

где  $S$  — площадь сегмента, отсекаемого плоскостью  $\beta$ ,  $\delta$  — толщина оболочки,  $\gamma$  — плотность материала,  $2h'$  — скорость деформации. Имеем

$$S \simeq 2\pi h \sqrt{R_1 R_2}.$$

Подставляя полученные значения в выражение  $W$ , получим

$$W = 4\pi h \sqrt{R_1 R_2} \delta \gamma h'^2 - \pi c E \delta^{3/2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (2h)^{3/2} - 2\pi p h^2 \sqrt{R_1 R_2} + (*).$$

Таким образом, выражение  $W$  имеет вид

$$W = c_0 (h h'^2 - c_1 h^{3/2} - c_2 h^2) + (*),$$

где  $c_0, c_1, c_2$  — положительные постоянные (не зависят от  $h$ ).

Из обращения в нуль вариации функционала  $J$  следует, что функция  $h(t)$ , задающая деформацию, удовлетворяет

уравнению Эйлера — Лагранжа

$$2hh'' + h'^2 + \frac{3}{2}c_1\sqrt{h} + 2c_2h = 0.$$

Умножая это уравнение на  $h'$  и интегрируя, получим

$$hh'^2 + c_1h^{3/2} + c_2h^2 = c = \text{const.}$$

Постоянная интегрирования  $c$ , очевидно, больше нуля.

В момент полного прощелкивания ( $h \rightarrow 0$ )  $h' \rightarrow \infty$ . А так как  $h$  по смыслу неотрицательно, то скорость выпучивания ( $h'$ ) в момент прощелкивания терпит разрыв. Физически это значит, что прощелкивание сопровождается ударом. В результате этого удара и получается «хлопок».

**2. Критический импульс.** Будём рассматривать пологую строго выпуклую оболочку, жестко закрепленную по краю, находящуюся под внешним давлением  $q_0$ , меньшим верхнего критического значения  $q_c$ . Пусть такая оболочка испытывает кратковременное внешнее давление  $q$ , значительно превосходящее  $q_c$ . Тогда при достаточной интенсивности импульса  $q\tau$ , создаваемого этой нагрузкой, возможно полное прощелкивание оболочки. Оценим величину этого импульса.

Мы будем представлять себе деформацию оболочки при указанном силовом воздействии на нее следующим образом (рис. 51). В начальный момент под нагрузкой  $q$  оболочка теряет устойчивость и начинает выпучиваться (1). Затем выпучивание увеличивается и приводит к частичному прощелкиванию (2). После этого оболочка либо восстанавливает свою первоначальную форму (выпучивание исчезает), либо в какой-то момент (3) деформация останавливается, а затем снова растет до полного прощелкивания. Нас интересует тот случай, когда реализуется вторая из указанных возможностей.



Рис. 51

(рис. 51). В начальный момент под нагрузкой  $q$  оболочка теряет устойчивость и начинает выпучиваться (1). Затем выпучивание увеличивается и приводит к частичному прощелкиванию (2). После этого оболочка либо восстанавливает свою первоначальную форму (выпучивание исчезает), либо в какой-то момент (3) деформация останавливается, а затем снова растет до полного прощелкивания. Нас интересует тот

случай, когда реализуется вторая из указанных возможностей.

Ввиду кратковременности действия нагрузки  $q$  она сообщает области выпучивания скорость  $v$ , которая определяется соотношением

$$S\delta yv = Sq\tau,$$

где  $S$  — площадь области выпучивания,  $\delta$  — толщина оболочки,  $\gamma$  — плотность материала. Отсюда

$$v = \frac{q\tau}{\gamma\delta}.$$

Кинетическая энергия движения оболочки, обусловленная воздействием импульса  $q\tau$ , равна

$$K = \frac{S(q\tau)^2}{2\gamma\delta}.$$

Эта энергия, так же как и производимая давлением  $q_0$  работа  $A$ , в состоянии (4) переходят в энергию деформации оболочки. Таким образом, мы имеем равенство

$$U(4) = K + A(4), \quad (*)$$

где (4) указывает на то, что соответствующая величина определяется для состояния оболочки (4), когда скорость деформации равна нулю.

Ввиду неустойчивости упругого состояния равновесия в форме (4) (гл. 1), оболочка с этого состояния либо восстанавливает свою первоначальную форму, либо переходит к полному прощелкиванию. Все зависит от того, будет ли нагрузка  $q(4)$ , воспринимаемая оболочкой в состоянии (4), меньше  $q_0$  или больше  $q_0$ .

В зависимости от прогиба  $2h$  в центре выпучивания энергия деформации определяется по формуле

$$U = \pi c E \delta^{3/2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) (2h)^{3/2}.$$

Производимая внешним давлением  $q_0$  работа равна

$$A = 2\pi q_0 h^2 \sqrt{R_1 R_2}.$$

Подставляя эти значения в соотношение (\*), получим уравнение для прогиба  $2h$  в состоянии (4).

Воспринимаемая оболочкой нагрузка при выпучивании в зависимости от прогиба в центре ( $2h$ ) определяется по формуле

$$q(2h) = \frac{3}{2} c E \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{\delta^{3/2}}{\sqrt{2h}}.$$

Минимальное значение  $q_0$ , при котором возможно прощелкание оболочки из состояния (4), определяется условием

$$q_0 = q(2h), \quad (**)$$

где  $2h$  находится из уравнения (\*). Поэтому минимальный импульс  $q\tau$  в зависимости от статической нагрузки  $q_0$  мы получим, если исключим параметр  $h$  из уравнений (\*), (\*\*) и полученное соотношение разрешим относительно  $q\tau$ .

Обозначим через  $q_i$  нижнее критическое давление для оболочки. В гл. 1 (стр. 55) для него получена формула

$$q_i = \frac{3}{2} cE \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{\delta^{3/2}}{\sqrt{2h_i}},$$

где  $2h_i$  — максимальный геометрически допустимый прогиб в центре выпучивания. Величины  $U$  и  $A$  в соотношении (\*) можно записать так:

$$U = \frac{2}{3} \pi q_i \sqrt{R_1 R_2} (2h)^{3/2} \sqrt{2h_i},$$

$$A = \frac{\pi}{2} q_i \sqrt{R_1 R_2} (2h)^{3/2} \sqrt{2h_i}.$$

В выражении для  $A$  мы воспользовались равенством  $q_0 = q(2h)$ .

Теперь соотношения (\*) и (\*\*), из которых надлежит исключить  $h$ , запишутся так:

$$\frac{\pi}{6} q_i \sqrt{R_1 R_2} (2h)^{3/2} \sqrt{2h_i} = K,$$

$$q_i \sqrt{\frac{h_i}{h}} = q_0.$$

Параметр  $h$  легко исключается, и мы получаем

$$\frac{\pi}{6} q_i^4 \sqrt{R_1 R_2} (2h_i)^2 = K q_0^3.$$

Подставив в это соотношение значение

$$K = \frac{S(q\tau)^2}{2\gamma\delta},$$

будем иметь

$$\frac{\pi}{6} q_i^4 \sqrt{R_1 R_2} (2h_i)^2 = \frac{S(q\tau)^2}{2\gamma\delta} q_0^3.$$

Отсюда видно, что импульс  $q\tau$  будет минимальным, если максимально  $S$ , то есть площадь области выпучивания в момент потери устойчивости. Будучи сегментом, эта область будет наибольшей при высоте  $2h_l$ . В этом случае

$$S = 2\pi h_l \sqrt{R_1 R_2}.$$

Подставляя это значение в полученное выше соотношение, находим

$$\frac{1}{3} q_l^4 (2h_l) = \frac{(q\tau)^2 q_0^3}{2\gamma\delta}.$$

Эта формула устанавливает связь между величиной статического внешнего давления  $q_0$  на оболочку и кратковременной нагрузкой  $q$ , действующей за время  $\tau$ , способной вызвать полное прощелкивание оболочки. Напомним, что здесь  $q_l$  — нижнее критическое давление, как мы его определили в главе 1,  $2h_l$  — максимальный геометрически допустимый прогиб оболочки при зеркальном выпучивании,  $\delta$  — толщина оболочки,  $\gamma$  — плотность материала.

## § 2. Динамическое нагружение цилиндрической оболочки

В настоящем параграфе мы рассмотрим задачи, аналогичные тем, которые в § 1 решены для строго выпуклых оболочек. Представим себе цилиндрическую оболочку, шарнирно опертую по краям, находящуюся под действием осевой сжимающей нагрузки  $q_0$ , меньшей верхнего критического значения. Пусть на эту оболочку кратковременно действует нагрузка  $q$ , значительно превосходящая верхнюю критическую. При этом оболочка теряет устойчивость и начинает выпучиваться. При достаточной интенсивности импульса нагрузки  $q$  может случиться, что оболочка не восстанавливает исходную цилиндрическую форму. Определение минимального такого импульса составляет содержание п. 1. В п. 2 рассматривается аналогичная задача для импульса, создаваемого внешним давлением.

1. Критический импульс при осевом сжатии. Будем рассматривать цилиндрическую оболочку радиуса  $R$ , длины  $L$  и толщины  $\delta$ , шарнирно опертую по краям, находящуюся



под действием осевой сжимающей нагрузки  $q_0$ . Пусть, кроме того, на оболочку кратковременно действует нагрузка  $q$  в течение времени  $t$ . Выясним, при каком значении  $q_0$  оболочка, потеряв устойчивость под действием нагрузки  $q$ , восстанавливает свою первоначальную цилиндрическую форму. В связи с этим рассмотрим прежде всего начальную стадию деформации оболочки во времени.

Мы будем предполагать, что выпучивание оболочки в начальный момент описывается законом

$$w = u(t) \sin \frac{2\pi m x}{L} \sin \frac{n y}{R}.$$

Здесь  $w$  — нормальный прогиб оболочки,  $m$  и  $n$  — целочисленные параметры, характеризующие форму волнообразования на поверхности оболочки при выпучивании,  $x$ ,  $y$  — координаты на поверхности оболочки:  $x$  — по образующей,  $y$  — по круговому сечению, перпендикулярному оси. Исходя из указанного предположения о характере прогибов оболочки при выпучивании, найдем функцию  $u(t)$ , задающую изменение прогиба во времени. С этой целью составим уравнение движения оболочки.

Движение оболочки определяется из условия стационарности функционала

$$J = \int (K - U + A) dt,$$

где  $K$  — кинетическая энергия движения,  $U$  — энергия деформации,  $A$  — производимая внешней нагрузкой работа. Найдем выражения для  $K$ ,  $U$  и  $A$ . Мы будем предполагать, что кинетическая энергия движения оболочки обусловлена в основном радиальными перемещениями. Тогда она вычисляется по формуле

$$K = \frac{1}{2} \gamma \delta \iint w'^2 dx dy,$$

где  $\gamma$  — плотность материала оболочки. Несложный подсчет показывает, что

$$K = \frac{1}{4} \pi R L \gamma \delta u'^2.$$

Для того чтобы определить энергию деформации  $U$ , будем рассуждать следующим образом. Прежде всего, очевидно,

$$U = C u^2,$$

где  $C$  не зависит от  $u$ . Составим уравнение собственных колебаний оболочки. Это будет уравнение Эйлера — Лагранжа для функционала

$$\int (K - U) dt$$

и, следовательно, оно имеет вид

$$\frac{1}{4} \pi R L \gamma \delta u'' + C u = 0.$$

Частота собственных колебаний  $\omega(m, n)$  выражается через коэффициенты этого уравнения. Именно,

$$\omega^2 = \frac{4C}{\pi R L \gamma \delta}.$$

Отсюда

$$C = \frac{1}{4} \omega^2 \pi R L \gamma \delta.$$

Итак, энергия деформации оболочки равна

$$U = \frac{1}{4} \omega^2 \pi R L \gamma \delta u^2,$$

где  $\omega$  — частота собственных колебаний оболочки, отвечающая форме волнообразования с параметрами  $m$  и  $n$ .

Найдем теперь производимую внешней нагрузкой  $q$  работу  $A$ . Поперечная деформация оболочки сопровождается осевым сжатием вдоль образующих. В сечении  $y$  это сжатие равно

$$\Delta L = \frac{1}{2} \int_0^L \varpi_x^2 dx.$$

Отсюда работа

$$A = \int_0^{2\pi R} \Delta L q \delta dy = \frac{q \delta}{2} \int \int \varpi_x^2 dx dy.$$

Несложные вычисления дают

$$A = \frac{q \pi^3 \delta m^2 R u^2}{L}.$$

Теперь легко записать уравнение движения оболочки. Оно имеет вид

$$u'' - \bar{\omega}^2 u = 0,$$

$$-\bar{\omega}^2 = \omega^2 - \frac{4\pi^2 q m^2}{L^2 \gamma}.$$

Мы предполагаем нагрузку  $q$  достаточно большой, так что

$$\omega^2 - \frac{4\pi^2 q m^2}{L^2 \gamma} < 0.$$

Так как прогиб  $u$  в начальный момент равен нулю, то интересующее нас решение уравнения движения имеет вид

$$u = c \operatorname{sh} \bar{\omega} t.$$

Для того чтобы имело место выпучивание,  $c$  должно быть отлично от нуля. При этом  $u'(0) = c\bar{\omega} \neq 0$ . Таким образом, выпучивание оболочки в начальный момент имеет отличную от нуля скорость. Это, между прочим, объясняет «хлопок», которым сопровождается потеря устойчивости.

Для того чтобы определить постоянную  $c$  и, следовательно, скорость деформации в момент потери устойчивости, будем рассуждать следующим образом. Ввиду того, что нагрузка  $q$  значительно больше критической, энергия деформации сжатия усилием  $q$  в момент выпучивания освобождается и переходит в кинетическую энергию движения. Из этого условия можно определить кинетическую энергию, следовательно, и скорость деформации.

Сжатие оболочки, вызванное нагрузкой  $q$ , равно

$$\Delta L = \frac{q}{E} L.$$

Суммарное усилие, действующее по краю оболочки и создаваемое нагрузкой  $q$ , будет

$$F = 2\pi R \delta q.$$

Отсюда энергия оболочки, сообщаемая нагрузкой  $q$ , равна

$$U_0 = \frac{q^2}{E} 2\pi R L \delta.$$

Так как в результате потери устойчивости энергия  $U_0$  переходит в кинетическую энергию выпучивания, то

$$\frac{q^2}{E} 2\pi R L \gamma = \frac{1}{4} \pi R L \gamma \delta u'$$

Отсюда

$$u' = \frac{q \cdot 2\sqrt{2}}{V\gamma E}.$$

Следовательно, постоянная

$$c = \frac{q \cdot 2\sqrt{2}}{\bar{\omega} V\gamma E}.$$

Таким образом, в начальной стадии выпучивание происходит по закону

$$u = \frac{q \operatorname{sh} \bar{\omega} t}{\bar{\omega} V\gamma E} \cdot 2\sqrt{2}$$

К моменту  $\tau$  прекращения действия нагрузки  $q$  полная энергия оболочки (кинетическая энергия и энергия деформации) будет

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4} \pi R L \gamma \delta u'^2 + \frac{1}{4} \omega^2 \pi R L \gamma \delta u^2 = \\ &= 2\pi R L \delta \frac{q^2}{E} \left( \operatorname{ch}^2 \bar{\omega} \tau + \frac{\omega^2}{\bar{\omega}^2} \operatorname{sh}^2 \bar{\omega} \tau \right). \end{aligned}$$

После прекращения действия нагрузки  $q$  оболочка продолжает выпучиваться под нагрузкой  $q_0$ . Изучим это выпучивание во времени. Когда деформация оболочки становится значительной, форму ее можно приближать поверхностью  $Z$ , которая подробно описана в гл. 3. Эта поверхность определяется функцией  $\tilde{y}(x, t)$ . Скорость точек при деформации поверхности  $Z$  будет  $\tilde{y}_t = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t}$ . Поэтому кинетическая энергия движения равна

$$K = 2\pi R \delta \gamma \int_0^L \tilde{y}_t^2 dx.$$

Так же как и в гл. 3, вместо функции  $\tilde{y}$  введем функцию  $y(x, t)$ , полагая

$$\tilde{y} = \frac{\pi}{2n} y.$$

При этом

$$K = \frac{\pi^3}{2n^2} R \delta \gamma \int_0^L y_t^2 dx.$$

С помощью функции  $y(x, t)$  энергия деформации оболочки выражается по формуле (гл. 3)

$$U = \frac{D\pi^2 a}{4n} \int_0^L y_{xx}^2 dx + \frac{2\nu D\pi}{R} \int_0^L y_x^2 dx + \\ + 2cnE\delta^{1/2} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{1/2} \int_0^L |y_{xx}|^{1/2} (1 + y_x^2) dx + \frac{D\pi L}{R}.$$

Производимая нагрузкой  $q_0$  работа равна

$$A = 2\pi R \delta q_0 \frac{\pi^2}{8n^2} \int_0^L y_x^2 dx.$$

Пусть  $a$  и  $b$  — периоды волнообразования на поверхности оболочки по окружности и по образующей соответственно. Если отношение  $b/a$  невелико, то для функции  $y(x, t)$ , задающей форму поверхности оболочки при больших прогибах, можно принять выражение

$$y = u(t) \sin \frac{2\pi mx}{L}.$$

При этом для кинетической энергии  $K$ , энергия деформации  $U$  и работы  $A$  получаются выражения вида

$$K = A_1 u'^2,$$

$$U = B_1 u^2 + B_2 |u|^{1/2} + B_3 |u|^{3/2} + B_0,$$

$$A = C u^2 q_0,$$

где  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C$  — постоянные, которые без труда вычисляются. Они зависят от геометрических величин, характеризующих размеры оболочки ( $R$ ,  $L$ ,  $\delta$ ), параметров волнообразования ( $m$ ,  $n$ ) и упругих свойств материала оболочки ( $E$ ,  $\nu$ ).

Пусть оболочка после прекращения действия нагрузки  $q$  под нагрузкой  $q_0$  совершает колебательное движение около основной формы. В момент, когда выпучивание останавливается, энергия  $U_0$ , сообщаемая нагрузкой  $q$  в начальной стадии выпучивания, и работа  $A$ , производимая нагрузкой  $q_0$  к этому моменту, полностью переходят в энергию

деформации оболочки  $U$ . Отсюда получается соотношение

$$U_0 + A = U.$$

Если рассматривать это соотношение как уравнение для  $u$ , то оно заведомо имеет решение при малых  $q_0$  и, напротив, не имеет решения при достаточно больших  $q_0$ . Когда решение есть, оболочка будет восстанавливать свою форму, когда же его нет, выпучивание, грубо говоря, неограниченно растет. При этом надо еще иметь в виду, что  $u$  ограничено геометрическим условием (гл. 3)

$$|u| < \frac{\pi R}{2n},$$

так что речь идет не о всяком решении, а о решении, удовлетворяющем этому условию.

Максимальное значение  $q_0$ , при котором решение еще существует, определяется тем условием, что для него решение кратное. Следовательно, для такого  $q_0$  уравнения

$$U_0 + A - U = 0,$$

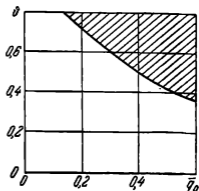
$$(U_0 + A - U)'_u = 0 \quad (*)$$

удовлетворяются одновременно. Если из этих уравнений исключить  $u$ , то мы получим соотношение, связывающее критическую комбинацию параметров, характеризующих динамическую нагрузку  $q$ ,  $\tau$ ,  $q_0$ .

Указанное соотношение между  $q$ ,  $\tau$  и  $q_0$  удобно представить графически. Для этого систему уравнений (\*) разрешим относительно  $q_0$  и  $U_0$ . Тогда получим

$$q_0 = \frac{B_1}{C} + \frac{1}{4} \frac{B_2}{C} |u|^{-1/2} + \frac{3}{4} \frac{B_3}{C} |u|^{-1/2},$$

$$U_0 = \frac{3}{4} B_2 |u|^{1/2} + \frac{1}{4} B_3 |u|^{3/2}$$



Теперь зависимость между величинами  $q_0$  и  $U_0$  легко строится, так как  $q_0$  и  $U_0$  представлены в зависимости от одного и того же параметра ( $u$ ). На рис. 52 эта зависимость дана

в безразмерных переменных  $\bar{q}_0$  и  $\bar{\vartheta}$ .

$$\bar{q}_0 = \frac{q_0 R}{E\delta}, \quad \bar{q} = \frac{qR}{E\delta},$$

$$\bar{\vartheta} = 2\bar{q}^2 \left( \text{ch}^2 \bar{\omega}\tau + \frac{\omega^2}{\bar{\omega}^2} \text{sh}^2 \bar{\omega}\tau \right).$$

Параметры волнообразования

$$\xi = \frac{Ln}{2\pi Rm} = 1, \quad \eta = \frac{n^2\delta}{R} \simeq 0,8.$$

Заштрихованная область отвечает тем значениям параметров нагрузки  $q$ ,  $\tau$ ,  $q_0$ , при которых выпучивание неограниченно растет.

**2. Критический импульс при внешнем давлении.** Мы снова рассматриваем шарнирно опертую по краям цилиндрическую оболочку. Пусть эта оболочка находится под действием стационарного внешнего давления  $q_0$  и кратковременного (в течение  $\tau$ ) значительного давления  $q$ . Пусть давление  $q_0$  меньше верхнего критического значения, а  $q$  гораздо больше него. Под давлением  $q$  оболочка теряет устойчивость и начинает выпучиваться. Может случиться, что выпучивание, возникающее под давлением  $q$ , продолжает неограниченно расти. Задача состоит в определении критической комбинации величин  $q$ ,  $\tau$ ,  $q_0$ , при которых реализуется указанная возможность. Эта задача принципиально не отличается от рассмотренной в п. 1, и поэтому наше изложение здесь будет достаточно кратким.

Для прогибов  $w$  в начальной стадии выпучивания мы примем выражение

$$w = u(t) \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{R}.$$

Зависимость  $u$  от  $t$  определяется из условия стационарности функционала

$$\int (K - U + A) dt,$$

где  $K$  — кинетическая энергия движения,  $U$  — энергия деформации оболочки,  $A$  — производимая давлением  $q$  работа при

деформации. Имеем

$$K = \frac{1}{4} \pi R L \gamma \delta u^2,$$

$$U = \frac{1}{4} \omega^2 \pi R L \gamma \delta u^2,$$

где  $\omega$  — частота собственных колебаний, отвечающая принятой форме волнообразования.

Вычислим работу  $A$ . Имеем

$$A = q \Delta V,$$

где  $\Delta V$  — изменение объема, ограничиваемого оболочкой. Очевидно,

$$\Delta V = \int_0^L \Delta S dx,$$

где  $\Delta S$  — изменение площади поперечного сечения при деформации цилиндра, т. е.

$$\Delta S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (R^2 - (R + w)^2) d\varphi, \quad \varphi = \frac{y}{R}.$$

Замечая, что

$$\int_0^{2\pi} w d\varphi = 0,$$

получаем

$$\Delta S = \frac{1}{2R} \int_0^{2\pi R} w^2 dy.$$

Следовательно,

$$\Delta V = \frac{1}{2R} \int \int w^2 dx dy = \frac{\pi L}{4} u^2.$$

Таким образом,

$$A = \frac{\pi L q}{2} u^2.$$

Теперь легко записать уравнение движения оболочки в начальной стадии выпучивания. Оно имеет вид

$$u'' - \bar{\omega}^2 u = 0,$$



где

$$-\bar{\omega}^2 = \omega^2 - \frac{q}{R\gamma\delta}.$$

Решение уравнения для  $u$ , обращающееся в нуль при  $t = 0$ , будет

$$u = c \operatorname{sh} \bar{\omega} t.$$

Для определения постоянной  $c$  воспользуемся теми же соображениями, что и при рассмотрении осевого сжатия в п. 1. В результате потери устойчивости и выпучивания, энергия  $U_0$ , сообщаемая давлением  $q$  оболочке, переходит в кинетическую энергию движения. Энергия  $U_0$  на единицу площади поверхности равна  $\delta\sigma^2/E$ , где  $\sigma$  — напряжения сжатия в оболочке, обусловленные давлением  $q$ ,  $E$  — модуль упругости материала. Принимая во внимание, что  $\sigma = qR/\delta$ , находим

$$U_0 = \frac{2\pi q^2 R^3 L}{E\delta}.$$

Сравнивая энергию  $U_0$  с кинетической энергией движения в начальный момент, получим

$$\frac{2\pi R^3 L q^2}{E\delta} = \frac{1}{4} \pi R L \gamma \delta u'^2.$$

Отсюда скорость выпучивания в начальный момент равна

$$u' = 2 \sqrt{2} \frac{R}{\delta} \frac{q}{\sqrt{E\gamma}}.$$

Так как, с другой стороны,  $u' = c\bar{\omega}$ , то

$$c = 2 \sqrt{2} \frac{R}{\delta\bar{\omega}} \frac{q}{\sqrt{E\gamma}}.$$

Итак, в начальной стадии выпучивание происходит по закону

$$u(t) = \frac{2\sqrt{2}R}{\delta\bar{\omega}} \frac{q}{\sqrt{E\gamma}} \operatorname{sh} \bar{\omega} t.$$

К моменту прекращения действия нагрузки  $q$ , сообщенная оболочке энергия будет равна

$$U_0 = \frac{2\pi R^3 L q^2}{E\delta} \left( \operatorname{ch}^2 \bar{\omega} \tau + \frac{\omega^2}{\bar{\omega}^2} \operatorname{sh}^2 \bar{\omega} \tau \right).$$

Изучим теперь деформацию оболочки во времени при значительном выпучивании. В гл. 3 дано общее выражение для энергии деформации оболочки  $U$  и производимой давлением  $q$  работы  $A$  при заданном характере прогибов  $y(x)$ . Если переменные  $x$  и  $y$  нормировать, полагая

$$x = \frac{L}{2} \bar{x}, \quad y = \frac{\pi R}{2n} \bar{y},$$

$$U = \frac{\pi^3 E \delta^3}{24 (1 - \nu^2) n^4} \left( \frac{R}{L} \right) J,$$

$$A = \frac{\pi^3 q E \delta^3}{8 n^2 \epsilon} \left( \frac{R}{L} \right) \lambda,$$

$$J = \frac{\pi^2}{n^2} \left( \frac{R}{L} \right)^2 \int_{-1}^1 y_{xx}^2 dx + 2\nu \int_{-1}^1 y_x^2 dx +$$

$$+ 6(1 - \nu^2) \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \int_{-1}^1 |y_{xx}|^{1/2} dx + \text{const},$$

$$\lambda = \int_{-1}^1 y^2 dx, \quad \epsilon = \frac{R\delta}{L^2}.$$

В выражении  $J$  и  $\lambda$  черта над нормированными переменными  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  для простоты записи опущена.

При исследовании статического равновесия оболочки под данным давлением мы приближали график функции прогибов  $y(x)$  двумя прямолинейными отрезками, гладко примыкающими к параболе на участке  $|x| < \alpha$ . В ходе этого исследования выяснилось, что величина  $\alpha$  мала.

Если теперь в рассматриваемой динамической задаче о движении оболочки исходить из того же способа приближения прогибов, считая заранее  $\alpha$  малым, то придем к тому же выражению энергии деформации, что и в статической задаче. Это связано с малостью параметра  $\epsilon = R\delta/L^2$ . Физическая причина такого совпадения состоит в том, что энергия деформации сосредоточена в окрестности  $|x| < \alpha$ , а основная доля кинетической энергии сосредоточена вне этой окрестности, то есть при  $|x| > \alpha$ .

Следуя методу, изложенному в гл. 3, найдем выражения для энергии деформации и производимой внешним давлением работы. Они имеют вид

$$U = A_1 \sqrt{\lambda} + A_2 \lambda + A_0, \quad A = C q_0 \lambda,$$

где  $A_1$ ,  $C$  — постоянные, которые без труда определяются.

Если оболочка после прекращения действия нагрузки  $q$  совершает колебания около основной цилиндрической формы, то в момент, когда скорость движения равна нулю ( $\lambda' = 0$ ), энергия  $U_0$  и работа  $A(\lambda)$  полностью переходят в энергию деформации  $U(\lambda)$ . Таким образом, в этот момент

$$U(\lambda) = U_0 + A(\lambda). \quad (*)$$

Если это соотношение рассматривать как уравнение относительно  $\lambda$ , то оно имеет решение всякий раз, когда оболочка восстанавливает свою форму, совершая колебания, и не имеет решения, если выпучивание неограниченно растет. Максимальная нагрузка  $q_0$ , при которой уравнение (\*) имеет решение, отличается тем, что уравнение относительно  $\lambda$

$$(U - U_0 - A)'_{\lambda} = 0 \quad (**)$$

имеет то же самое решение, что и уравнение (\*). Критическая комбинация параметров  $q$ ,  $\tau$ ,  $q_0$  динамической нагрузки определяется соотношением

$$f(q, \tau, q_0) = 0,$$

которое получается из уравнений (\*) и (\*\*) исключением параметра  $\lambda$ .

Найдем соотношение  $f = 0$ . Имеем

$$U_0 = A_1 \sqrt{\lambda} + A_2 \lambda + A_0 - C q_0 \lambda, \quad 0 = \frac{1}{2} A_1 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + A_2 - C q_0.$$

Определяя из второго уравнения  $\sqrt{\lambda}$  и подставляя его в первое уравнение, получим искомое соотношение.

### § 3. Большие колебания цилиндрических оболочек

То обстоятельство, что способность оболочки сопротивляться внешнему воздействию обычно ослабевает при значительном выпучивании, имеет своим следствием уменьшение частоты собственных колебаний при увеличении амплитуды.

Более точное исследование этого вопроса будет дано в п. 1. Уменьшение частоты собственных колебаний при увеличении амплитуды имеет, в свою очередь, важное следствие. Именно, возмущение, находящееся в резонансе с малыми колебаниями, не приводит к неограниченному нарастанию последних. Изучение этого вопроса содержится в п. 2.

**1. Собственные колебания цилиндрической оболочки.**

Пусть цилиндрическая оболочка, шарнирно опертая по краям, совершает свободные колебания с такой же периодичностью прогибов по поверхности, которой обладает функция  $\sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{R}$ . Если колебания малы, то нормальный прогиб оболочки равен

$$w = u(t) \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{R},$$

где  $u(t)$  удовлетворяет уравнению

$$u'' + \omega^2 u = 0.$$

Здесь  $\omega$  — частота колебаний. Она определенным образом выражается через параметр волнообразования  $n$ , геометрические характеристики и механические свойства оболочки.

Рассмотрим теперь большие колебания оболочки. Найдем уравнение этих колебаний. Оно представляет собой уравнение Эйлера для функционала

$$\int (K - U) dt,$$

где  $K$  — кинетическая энергия движения,  $U$  — энергия деформации оболочки.

В главе 3 (стр. 222) для энергии деформации получено выражение

$$U = \frac{\pi^3 E \delta^3}{24 (1 - \nu^2) n^2} \left( \frac{R}{L} \right) J + \text{const},$$

$$J = \frac{\pi^2}{n^2} \left( \frac{R}{L} \right)^2 \int_{-1}^1 y''^2 dx + 2\nu \int_{-1}^1 y'^2 dx + \\ + 6(1 - \nu^2) \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-1}^1 |y''|^{1/2} dx, \quad \varepsilon = \frac{R\delta}{L^2}.$$

Функция  $y(x)$  известным образом связана с нормальным прогибом оболочки. Так же, как в задачах о статическом нагружении оболочки (гл. 3), функцию  $y(x)$  будем приближать функцией вида

$$y = \frac{ax^2}{2} - \frac{aa^2}{2} + aa(1-a) \quad \text{при } |x| \leq a,$$

$$y = aa(1-|x|) \quad \text{при } |x| \geq a.$$

График этой функции состоит из параболы на участке  $|x| \leq a$  и двух гладко примыкающих к ней прямолинейных отрезков с концами в точках  $(-1,0)$  и  $(+1,0)$ . Если предположить априори, что параметр  $a$  мал, то, как и в случае статических задач, энергия при заданной общей деформации, ограниченной условием

$$\int_{-1}^1 y^2 dx = \lambda = \text{const},$$

определяется из условия достижения  $\min J$ . Причина этого в том, что в указанном предположении энергия деформации сосредоточена в малой области  $|x| \leq a$ , в то время как кинетическая энергия движения сосредоточена в основном вне этой области. Таким образом, определение энергии деформации в рассматриваемой задаче о колебаниях оболочки сводится к определению минимума функционала  $J$  при условии  $\lambda = \text{const}$ .

Подставляя значения  $y(x)$  в интегралы, входящие в  $J$ , при малом  $a$  будем иметь

$$J = \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \left(\frac{R}{L}\right)^2 2aa^2 + 2(v-1)2a^2a^2 + 12(1-v^2) \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} aa^{1/2}.$$

Параметр деформации

$$\lambda = \frac{2}{3} a^2 a^2.$$

Минимум  $J$  находится без труда, и для него получается выражение

$$\min J = J_0 = 3,2 \left(\frac{\pi}{n}\right)^{3/2} \left(\frac{R}{L}\right)^{3/2} \frac{1}{\epsilon^{1/4}} \sqrt{\lambda} + 6v\lambda.$$

Ввиду того, что график функции  $y(x)$  близок к ломаной, состоящей из двух звеньев, деформацию оболочки можно

характеризовать максимальным прогибом  $u(t)$ . Установим связь между  $u$  и  $\lambda$ . В нормированных переменных имеем

$$\lambda = \int_{-1}^1 y^2 dx.$$

В исходных переменных будет

$$\lambda = \frac{8n^2}{\pi^2 R^2 L} \int_{-L/2}^{L/2} y^2 dx.$$

Прогиб оболочки задается функцией

$$\tilde{y} = \frac{\pi}{2n} y.$$

Поэтому

$$\lambda = \frac{32n^4}{\pi^4 R^2 L} \int_{-L/2}^{L/2} \tilde{y}^2 dx.$$

Так как при рассматриваемых деформациях график функции  $\tilde{y}(x)$  близок к ломаной из двух звеньев,

$$\tilde{y}(x) \simeq \frac{2x}{L} u(t),$$

где  $u(t)$  — максимальный прогиб (прогиб при  $x = 0$ ). Отсюда

$$\lambda = \frac{32n^4}{3\pi^4} \frac{u^2}{R^2}.$$

Подставляя это значение  $\lambda$  в выражение  $J_0$ , находим энергию деформации оболочки в зависимости от максимального прогиба  $u$ :

$$U = 2A_1' |u| - k' u^2 + A_0',$$

где  $A_0'$ ,  $A_1'$  и  $k'$  — постоянные, причем

$$A_1' = 1,15n^{4/3} \left(\frac{R}{L}\right)^{2/3} \frac{1}{\varepsilon^{1/3}} \frac{\pi^3 E \delta^3}{24(1-\nu^2)L}.$$

Найдем теперь кинетическую энергию  $K$  движения оболочек. Так как функция  $\tilde{y}$ , задающая прогиб, изменяется по существу линейно в каждом интервале  $(-L/2, 0)$ ,  $(L/2, 0)$ , обращается в нуль при  $x = \pm L/2$  и имеет значение  $u(t)$

при  $x = 0$ , то

$$K = \frac{1}{2} \int \int \delta\gamma \left( \frac{2xu'}{L} \right)^2 dx dy = \frac{\pi RL \delta\gamma u'^2}{6}.$$

Составим уравнение колебаний оболочки при больших деформациях. Имеем

$$K - U = \frac{\pi RL \delta\gamma}{6} (u'^2 - 2A_1 |u| + k^2 u^2) + \text{const},$$

где  $A_1$  и  $k$  — постоянные, причем

$$A_1 = 3,1\pi^{1/2} \frac{E}{\gamma} \frac{\delta^2}{(\delta R^2)^{1/2} L}.$$

Отсюда уравнение колебаний при больших прогибах имеет вид

$$u'' \pm A_1 - k^2 u = 0,$$

где знак «+» надо брать при  $u > 0$ , а знак «—» при  $u < 0$ . Таким образом, мы имеем два уравнения, описывающих движение оболочки:

$$u'' + \omega^2 u = 0 \quad \text{при малом } |u|,$$

$$u'' \pm A_1 - k^2 u = 0 \quad \text{при большом } |u|.$$

Введем функцию  $\vartheta(u)$ , определяемую условиями

$$1) \vartheta(u) = -\vartheta(-u),$$

$$2) \vartheta(u) = \omega^2 u \quad \text{при } 0 \leq u \leq \frac{A_1}{\omega^2 + k^2} = a,$$

$$3) \vartheta(u) = \pm A - k^2 u \quad \text{при } |u| \geq a.$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$u'' + \vartheta(u) = 0. \quad (*)$$

При малом  $|u|$  оно совпадает с уравнением  $u'' + \omega^2 u = 0$ , а при большом  $|u|$  — с уравнением  $u'' \pm A_1 - k^2 u = 0$ . Мы будем предполагать, что уравнение (\*) описывает движение оболочки во всем диапазоне изменения прогиба  $u(t)$ . В этом предположении рассмотрим вопрос о влиянии амплитуды на частоту собственных колебаний оболочки.

Прежде всего, мы замечаем, что если амплитуда не превосходит  $a$ , то частота колебаний постоянна и равна  $\omega$ . При увеличении амплитуды частота колебаний будет убывать. Найдем частоту при амплитуде, большей  $a$ . Пусть  $\alpha$  — амплитуда

колебаний. Положим

$$\lambda = \int_0^{\alpha} \vartheta(u) du.$$

Умножим уравнение (\*) на  $u'$  и проинтегрируем в пределах  $(0, u)$ . Получим

$$+ \int_0^u \vartheta(u) du = \text{const.}$$

Постоянная интегрирования равна  $\lambda$ , так как  $u' = 0$  при  $u = \alpha$ . Таким образом,

$$u'^2 + \int_0^u \vartheta(u) du = \lambda.$$

Отсюда

$$\frac{du}{\left(\lambda - \int_0^u \vartheta(u) du\right)^{1/2}} = dt.$$

Интегрируя это уравнение в пределах четверти периода, что соответствует интегрированию по  $u$  от 0 до  $\alpha$ , получим период колебаний

$$\tau(\alpha) = 4 \int_0^{\alpha} \frac{du}{\left(\lambda - \int_0^u \vartheta(u) du\right)^{1/2}}.$$

Следовательно, частота колебаний равна

$$\omega(\alpha) = \frac{2\pi}{\tau(\alpha)}.$$

Оценим частоту собственных колебаний в случае, когда амплитуда  $\alpha \gg a$ . В связи с этим отметим два обстоятельства. Во-первых, в выражении

$$\vartheta(u) = \pm A_1 - k^2 u$$

при геометрически допустимых значениях  $k$  ( $\lambda < \frac{2}{3}$ ) основным членом является  $\pm A_1$ , а слагаемое  $k^2 u$  имеет подчиненное



значение. Во-вторых, при  $\alpha \gg a$  значение  $\vartheta(u)$  при  $|u| < a$  в выражении  $\tau(\alpha)$  мало сказывается на величине  $\tau(\alpha)$ . Поэтому при  $\alpha \gg a$  в формуле для  $\tau(\alpha)$  можно принять  $\vartheta(u) = A_1$ . Тогда получим

$$\tau(\alpha) = 8 \sqrt{\frac{\alpha}{A_1}}.$$

Соответственно частота колебаний при большой амплитуде  $\alpha$  будет

$$\omega(\alpha) = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{A_1}{\alpha}}.$$

**2. Вынужденные колебания оболочек.** Рассмотрим вынужденные колебания цилиндрической оболочки, шарнирно опертой по краям. В п. 1 мы нашли уравнение свободных колебаний. Оно имеет вид

$$u'' + \vartheta(u) = 0,$$

где функция  $\vartheta$  определяется условиями:

$$1) \quad \vartheta(u) = \omega^2 u \quad \text{при } |u| \leq a,$$

$$2) \quad \vartheta(u) = \pm A_1 - k^2 u \quad \text{при } |u| \geq a.$$

Это уравнение представляет собой уравнение Эйлера — Лагранжа для функционала

$$\int (K - U) dt,$$

где  $K$  — кинетическая энергия движения,  $U$  — энергия деформации. Уравнение вынужденных колебаний будет уравнением Эйлера — Лагранжа для функционала

$$\int (\dot{K} - U + A) dt,$$

где  $K$  и  $U$  имеют прежнее значение,  $A$  — производимая внешним возмущением работа. Отсюда следует, что уравнение вынужденных колебаний будет иметь вид

$$u'' + \vartheta(u) + \sigma = 0.$$

Найдем функцию  $\sigma$  для различных способов возмущения.

Пусть возмущение создается сосредоточенной силой  $f$ , нормальной к поверхности оболочки,

$$f = f_0 \sin \bar{\omega} t.$$

Обозначим через  $L'$  расстояние точки приложения силы  $f$  от ближайшего края оболочки ( $L' < \frac{L}{2}$ ). Ввиду того, что прогиб оболочки на любой половине образующей изменяется почти линейно и равен нулю на краях оболочки, прогиб в точке приложения силы будет  $\approx 2u(t) L'/L$ . Отсюда для работы  $A$  получается выражение

$$A = f_0 \sin \bar{\omega} t \frac{2L'}{L} u(t).$$

Для кинетической энергии  $K$  мы получим выражение вида

$$K = K_0 u'^2.$$

Отсюда следует, что функция  $\sigma$  в уравнении колебаний будет иметь следующий вид:

$$\sigma = \frac{2f_0 L'}{K_0 L} \sin \bar{\omega} t = \lambda \sin \bar{\omega} t.$$

Итак, уравнение вынужденных колебаний в рассматриваемом случае при больших колебаниях будет

$$u'' + \vartheta(u) + \lambda \sin \bar{\omega} t = 0.$$

Пусть теперь возмущение создается пульсирующим, равномерно распределенным по оболочке давлением  $q$ , изменяющимся по закону

$$q(t) = q_0 \sin \bar{\omega} t.$$

Производимая этим давлением работа при деформации оболочки будет

$$A = q \Delta V,$$

где  $\Delta V$  — изменение объема, ограничиваемого оболочкой, при деформации. Величина  $\Delta V$  была определена в гл. 3 при изучении статического нагружения оболочки внешним давлением. Если воспользоваться полученным там результатом, то найдем

$$\Delta V = cu^2,$$

где  $c$  — некоторая постоянная, зависящая от геометрических размеров оболочки и параметра волнообразования  $n$ . Следовательно, работа  $A$  в рассматриваемом случае нагружения будет иметь выражение

$$A = c' q u^2 \sin \bar{\omega} t.$$

Соответственно уравнение колебаний при больших прогибах будет

$$u'' + \vartheta(u) + \lambda u \sin \bar{\omega} t = 0.$$

В случае, когда возмущение создается равномерно распределенным вдоль края оболочки пульсирующим давлением

$$p = p_0 \sin \bar{\omega} t,$$

уравнение получается таким же, но со своим значением коэффициента  $\lambda$ .

Предположим теперь, что на оболочку действует возмущение достаточно малой интенсивности, но с частотой  $\bar{\omega} = \omega$ . Если бы частота собственных колебаний оболочки не изменялась при увеличении амплитуды, то такое возмущение, как бы ни была мала его интенсивность, привело бы к неограниченному нарастанию колебаний (неограниченному росту амплитуды). Однако, как показано в п. 2, частота колебаний сохраняет постоянное значение ( $\omega$ ) до тех пор, пока амплитуда не превосходит величины

$$a = \frac{A_1}{\omega^2 + k^2}.$$

При большей амплитуде колебаний резонанс возмущения и собственных колебаний нарушается. Отсюда мы делаем важный вывод о том, что возмущение достаточно малой интенсивности с частотой  $\omega$  раскачивает оболочку до амплитуды

$$a < \frac{A_1}{\omega^2}.$$

Дальнейшее нарастание колебаний при частоте возмущения  $\omega$  возможно только за счет увеличения интенсивности возмущения.

В заключение мы хотим сделать следующее замечание. Во всех наших рассмотренных случаях мы предполагали неограниченную упругость материала оболочки. К реальным оболочкам,

которые обладают ограниченной упругостью, наши выводы применимы лишь при выполнении определенных условий. Именно, напряжения в материале оболочки, возникающие при больших деформациях, определяемые по соответствующим формулам из гл. 3, не должны превосходить предела упругости. Ввиду того, что характер деформаций при колебаниях тот же, что и при статических деформациях с выпучиванием, указанное ограничение имеет тот же вид, что и для задач, рассмотренных в гл. 3. Грубо говоря, оно сводится к тому, что оболочка должна быть достаточно тонкой.

---

## ДОПОЛНЕНИЕ II.

### ОБ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Согласно принципу А, исследование закритических упругих состояний цилиндрической оболочки сводится к рассмотрению некоторого функционала, определенного на изометрических преобразованиях основной формы, при удовлетворении некоторых граничных условий, отвечающих способу опирания оболочки. Для изометрических преобразований, построенных в гл. 3, эти граничные условия не удовлетворяются.

Правда, в тех случаях, когда закритическая деформация отличается периодичностью строения по длине оболочки, например при осевом сжатии или комбинированном нагружении с преобладанием осевого сжатия, роль граничных условий значительно снижается. Удовлетворение граничных условий при рассмотрении соответствующих задач вряд ли может существенно повлиять на результаты гл. 3. Иначе обстоит дело в тех случаях, когда закритическая деформация сопровождается образованием сплошных выпучин на всю длину оболочки, например, в случае внешнего давления и кручения. Здесь, по-видимому, игнорировать граничные условия нельзя. В связи с этим в настоящем Дополнении, имея в виду соответствующие приложения, мы рассмотрим изометрические преобразования цилиндрической поверхности при условии шарнирного опирания вдоль края. Полученные результаты могут найти себе применение при изучении закритических деформаций замкнутых цилиндрических оболочек под внешним давлением и при кручении, а также при рассмотрении закритических упругих состояний цилиндрических панелей во всех вариантах нагружения.

**1. Некоторые общие свойства развертывающихся поверхностей.** Мы рассматриваем развертывающиеся поверхности с нарушением регулярности (двукратной дифференцируемости) вдоль отдельных линий. На этих линиях может происходить либо нарушение гладкости (образование ребер), либо разрывы для нормальных кривизн, которые, однако, предполагаются ограниченными. Согласно определению, развертываемая поверхность допускает наложение на плоскость с сохранением длин кривых, следовательно, и углов между ними. Рассмотрим некоторые свойства развертывающихся поверхностей, используемые в дальнейшем.

Прежде всего отметим, что каждая гладкая точка развертываемой поверхности является внутренней точкой прямолинейного отрезка, лежащего целиком на поверхности (прямолинейная образующая). Для регулярных, дважды дифференцируемых поверхностей, это хорошо известный факт из дифференциальной геометрии. Для более общих поверхностей, которые мы рассматриваем, это по существу устанавливается в работе [13]. Действительно, так как точка гладкая, а гладкость поверхности нарушается вдоль отдельных линий, то у этой точки есть гладкая окрестность. Ввиду того, что нормальные кривизны всюду, где они существуют, ограничены, рассматриваемая окрестность представляет собой поверхность ограниченной внешней кривизны. А каждая точка такой развертываемой поверхности является внутренней точкой отрезка, целиком лежащего на поверхности.

Если через точку развертываемой поверхности проходят две прямолинейные образующие, то эта точка имеет плоскую окрестность, то есть окрестность, являющуюся куском плоскости. Действительно, достаточно показать, что любой отрезок  $AB$  с концами на образующих принадлежит поверхности (рис. 53). Соединим точки  $A$  и  $B$  кратчайшей  $\gamma$  на поверхности. Развернем теперь окрестность точки  $O$  на плоскость. При этом отрезки  $OA$  и  $OB$  прямолинейных образующих перейдут в прямолинейные отрезки той же длины и с тем же углом между ними. Следовательно, при этой операции не изменится и расстояние между точками  $A$ ,  $B$ .

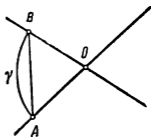


Рис. 53.

Кратчайшая  $\gamma$  перейдет в кратчайшую, то есть в прямолинейный отрезок, соединяющий точки  $A, B$ . Отсюда заключаем, что пространственное расстояние между точками  $A$  и  $B$  равно длине кривой  $\gamma$ . Но это может быть только в том случае, если кривая  $\gamma$  совпадает с прямолинейным отрезком  $AB$ . Отсюда следует, что отрезок  $AB$  лежит на поверхности.

Пусть  $AB$  — прямолинейная образующая на развертываемой поверхности. Покажем, что если какая-нибудь точка образующей имеет плоскую окрестность, то каждая внутренняя точка образующей тоже имеет такую окрестность (в этом случае мы будем говорить, что вдоль образующей имеет место уплощение поверхности). Действительно, пусть точка  $C$  образующей имеет плоскую окрестность. Проведем через  $C$  прямолинейный отрезок  $DE$  на поверхности (точка  $C$  внутренняя для отрезка  $DE$ ) так, чтобы он не налегал на  $AB$  (рис. 54). Это возможно, так как точка  $C$  имеет плоскую

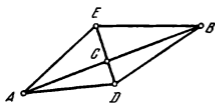


Рис. 54.

окрестность. Рассмотрим геодезический четырехугольник, ограниченный кратчайшими  $AD, DB, BE$  и  $EA$ . Приведенным выше рассуждением легко устанавливается, что этот четырехугольник плоский, а каждая внутренняя точка отрезка  $AB$  является внутренней для четырехугольника, что и

требовалось доказать. Точно так же доказывается, что если прямолинейные образующие  $AB$  и  $CD$  развертываемой поверхности имеют общую точку (концы не исключаются), то геодезический четырехугольник с вершинами  $A, B, C, D$  (вырождающийся в треугольник, если общая точка является концом образующей) будет плоским.

Если вдоль прямолинейной образующей развертываемой поверхности нет уплощения, то она упирается своими концами либо в ребро, либо в край поверхности. Действительно, пусть точка  $A$  — конец прямолинейной образующей  $g$  — является внутренней точкой поверхности и не принадлежит ребру. Тогда в точке  $A$  поверхность является гладкой, поэтому через точку  $A$  проходит прямолинейный отрезок  $\delta$ , лежащий на поверхности, причем точка  $A$  является его внутренней точкой. Если этот отрезок с одной стороны

налегает на образующую  $g$ , то  $A$  не является концом образующей  $g$  вопреки предположению. Если же отрезок  $\delta$  не налегает на образующую  $g$ , то по доказанному выше вдоль образующей имеет место уплощение, что также исключено. Утверждение доказано.

Если геодезическая кривизна ребра  $\gamma$  на развертываемой поверхности отлична от нуля, то такое ребро не может иметь плоской полуокрестности. Допустим противное. Пусть одна из полуокрестностей ребра  $\gamma$  плоская (рис. 55). Предположим, что это полуокрестность со стороны выпуклости ( $\omega_1$ ).

Возьмем на  $\gamma$  произвольную точку  $A$ . Касательная плоскость к поверхности в точке  $A$  со стороны полуокрестности  $\omega_1$  совпадает с соприкасающейся плоскостью ребра  $\gamma$ . Покажем, что касательная плоскость поверхности со стороны  $\omega_2$  совпадает с той же плоскостью. Действительно, так как поверхность разворачивается на плоскость, то геодезические кривизны ребра  $\gamma$  со стороны  $\omega_1$  и  $\omega_2$  одинаковы и отличаются только знаком. Углы, которые составляет соприкасающаяся плоскость ребра с касательными плоскостями поверхности, определяются

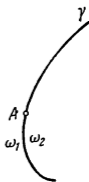


Рис. 55.

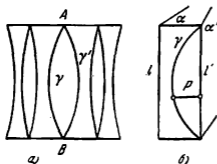
только кривизной ребра и его геодезическими кривизнами; следовательно, эти углы равны. Так как одна из касательных плоскостей поверхности (со стороны  $\omega_1$ ) совпадает с соприкасающейся плоскостью, то и другая касательная плоскость (со стороны  $\omega_2$ ) должна обладать тем же свойством. В итоге получается, что точка  $A$  является гладкой точкой поверхности вопреки предположению. Утверждение доказано.

**2. Качественное исследование изометрического преобразования цилиндрической поверхности.** Пусть цилиндрическая поверхность подвергается геометрическому изгибанию с образованием системы конгруэнтных вмятин на всю длину исходной поверхности, правильно расположенных в окружном направлении (рис. 56, а). Предположение о том, что вмятины распространяются на всю длину поверхности, мы понимаем в том смысле, что ограничивающие ее ребра  $\gamma$ ,  $\gamma'$  соединяют точки основания  $A$ ,  $B$ . Правильное расположение вмятин означает, что деформированная поверхность



имеет периодическое строение в окружном направлении. Каждую вмятину мы будем предполагать выпуклой и симметричной относительно плоскости, проходящей через ее граничные точки  $A$  и  $B$  на основании цилиндра. Задача, которую мы хотим решить, заключается в качественном описании формы деформированной поверхности. Ввиду периодичности строения можно ограничиться рассмотрением части поверхности, расположенной между двумя смежными плоскостями симметрии  $\alpha$  и  $\alpha'$ . Плоскость  $\alpha'$  проходит по оси вмятины, а плоскость  $\alpha$  — посередине между двумя вмятинами (рис. 56, б).

Прежде всего мы заметим, что линии пересечения  $l$  и  $l'$  поверхности с плоскостями симметрии  $\alpha$  и  $\alpha'$  являются геодезическими. На исходной цилиндрической поверхности им



соответствуют прямолинейные образующие. Это следует из того, что плоскости  $\alpha$  и  $\alpha'$  являются плоскостями симметрии, следовательно, пересекают поверхность ортогонально.

Предположим, что на линии  $l'$  нет прямолинейных отрезков. Тогда через каждую точку  $P$  этой линии проходит прямолинейная образующая, упирающаяся концом в ребро  $\gamma$ .

Действительно, прямолинейная образующая не может идти в направлении  $l'$ , ибо в этом случае она на нее налегает по свойству геодезических, а по предположению  $l'$  не содержит прямолинейных отрезков. Остается допустить, что образующая, проходящая через точку  $P$ , не перпендикулярна плоскости  $\alpha'$  и не лежит в этой плоскости. Но тогда по симметрии относительно плоскости  $\alpha'$  существует еще одна образующая, проходящая через  $P$  и, следовательно,  $P$  имеет плоскую окрестность. А это так же невозможно из-за отсутствия прямолинейных участков кривой  $l'$ . Итак, через каждую точку  $P$  кривой  $l'$  проходит прямолинейная образующая, перпендикулярная плоскости  $\alpha'$ . Эта образующая упирается своим концом в ребро поверхности  $\gamma$  (п. 1). Отсюда следует, что рассматриваемая поверхность в области вмятины является цилиндрической, с образующими, перпендикулярными плоскости симметрии  $\alpha'$ .

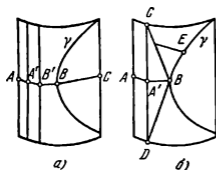
Выясним теперь, как устроена наша поверхность вне вмятины, то есть в области между ребром  $\gamma$  и кривой  $l$ . В отличие от случая кривой  $l'$  для кривой  $l$  нельзя предполагать отсутствие прямолинейных участков. Такое предположение немедленно приводит нас к заключению о том, что рассматриваемая поверхность и в области между  $l$  и  $\gamma$  тоже цилиндрическая, с образующими, перпендикулярными плоскости  $\alpha$ . Но для такой поверхности (это построенная в гл. 3 поверхность  $Z$ ) условие опирания по краям на окружности очевидным образом не выполняется. Таким образом, на кривой  $l$  должны быть прямолинейные участки.

Мы утверждаем, что по крайней мере один из концов прямолинейного отрезка кривой  $l$  принадлежит краю поверхности. Действительно, допустим, что оба конца  $A$  и  $B$  прямолинейного участка  $\delta$  линии  $l$  являются ее внутренними точками. Так как точки  $A$  и  $B$  заведомо не имеют плоских окрестностей, то через них проходят прямолинейные образующие  $g_A$  и  $g_B$ , перпендикулярные плоскости  $\alpha$ , упирающиеся в ребро  $\gamma$ . Часть поверхности  $\omega$ , ограниченная образующими  $g_A$ ,  $g_B$  и кривыми  $\gamma$ ,  $l$ , является плоской. Действительно, так как кривая  $\gamma$  обращена выпуклостью в сторону  $\omega$ , то через каждую внутреннюю точку  $P$  этой области проходит геодезическая, не пересекающая  $\gamma$ , с концами либо на отрезке  $\delta$ , либо на образующих  $g_A$  и  $g_B$ . Рассуждением, подобным рассуждению из п. 1, легко устанавливается, что эта геодезическая является прямолинейным отрезком. Отсюда следует, что область  $\omega$  является плоской. Так как  $\omega$  плоская область, то на участке между образующими  $g_A$  и  $g_B$  ребро  $\gamma$  имеет плоскую окрестность, что исключено в силу выпуклости  $\gamma$  (п. 1). Утверждение доказано.

Далее, мы утверждаем, что вблизи концов кривая  $l$  должна быть определено прямолинейной. Действительно, в противном случае найдется последовательность точек  $Q$  на кривой  $l$ , сходящаяся к концу, через которые проходят прямолинейные образующие, перпендикулярные плоскости  $\alpha$ , упирающиеся в ребро  $\gamma$ . Переходя к пределу, заключаем, что через конец  $l$  проходит прямолинейная образующая, идущая вдоль края поверхности. Но это невозможно, так как край поверхности не содержит прямолинейных участков (окружность). В итоге мы приходим к следующим двум возможностям. Либо кривая  $l$  является прямолинейным отрезком, либо она содержит

ровно два прямолинейных отрезка, каждый из которых одним концом упирается в край поверхности. Рассмотрим каждую из этих возможностей.

Предположим, что рассматриваемая поверхность имеет плоскость симметрии  $\beta$ , параллельную основаниям и расположенную посередине между ними. Рассмотрим дугу  $AB$  кривой пересечения плоскости симметрии  $\beta$  с поверхностью. Утверждаем, что если кривая  $AB$  содержит прямолинейный отрезок, то одним из его концов является точка  $B$ . Действительно, допустим противное. Тогда на дуге  $AB$  найдется прямолинейный отрезок  $A'B'$  (рис. 57, а), причем  $B' \neq B$ , а  $A'$  может совпадать с  $A$ . Так как точки  $A'$  и  $B'$  заведомо не имеют плоских окрестностей, то через них проходит



прямолинейные образующие, перпендикулярные плоскости  $\beta$  и упирающиеся в край поверхности. После этого известным способом заключаем, что часть поверхности, ограниченная этими образующими, плоская. Следовательно, край поверхности содержит прямолинейный отрезок. А это невозможно.

Покажем, что дуга  $AB$  определенно имеет прямолинейный участок  $A'B$ . Действительно, в противном случае через каждую точку дуги  $AB$  проходит прямолинейная образующая, перпендикулярная плоскости  $\beta$ , с концами на краю поверхности. Эта образующая лежит на исходной цилиндрической поверхности. Рассмотрим линию  $AC$  пересечения плоскости  $\beta$  с поверхностью. Она состоит из окружности  $AB$  и прямолинейного отрезка  $BC$ . По изометрии на исходной цилиндрической поверхности ей соответствует круговое сечение  $\gamma$ , следовательно, длина дуги  $AC$  равна длине дуги окружности края. Вместе с тем она заведомо короче этой дуги из-за прямолинейности участка  $BC$ . Итак, на кривой  $AB$  имеется, и притом один, прямолинейный отрезок с концом в точке  $B$ .

Обратимся к двум упомянутым выше возможностям для кривой  $l$ . Начнем со случая, когда  $l$  — прямолинейный отрезок. По доказанному, на  $AB$  есть прямолинейный отрезок  $A'B$ .

Через каждую точку дуги  $AB'$  проходит прямолинейная образующая, перпендикулярная плоскости  $\beta$ , с концами на краю поверхности. Часть поверхности, несущая эти образующие, совпадает с исходной цилиндрической поверхностью.

Выясним строение поверхности между образующей  $CD$  и ребром  $\gamma$  (рис. 57, б). Так как  $A'B$  и  $CD$  прямолинейные отрезки на поверхности, то треугольник  $BCD$  плоский (п. 1). Рассмотрим область между образующей  $BC$  и ребром  $\gamma$ . Утверждаем, что эта область не содержит уплощений и каждая ее образующая упирается одним концом в край поверхности, а другим — в ребро  $\gamma$ . Действительно, если прямолинейная образующая одним концом упирается в  $BC$ , а другим в ребро  $\gamma$  в некоторой точке  $E$ , то дуга  $BE$  ребра  $\gamma$  имеет плоскую полукрестность, что невозможно (п. 1). Если же она упирается одним концом в край, другим — в  $BC$ , то на краю поверхности будет прямолинейный отрезок, что также невозможно. Оба конца образующей ни краю, ни ребру одновременно не могут принадлежать. Итак, один конец образующей на краю поверхности, а другой — на ребре  $\gamma$ .

Допустим теперь, что в некоторой точке рассматриваемой области имеется уплощение (плоская окрестность). Проведем

две прямолинейные образующие через точки этой окрестности. Тогда либо край поверхности, либо ребро  $\gamma$  эти образующие пересекают в разных точках. Если это будет ребро, то его дуга между точками пересечения имеет плоскую полукрестность. Если это будет край, то отрезок между точками пересечения должен быть прямолинейным. Однако и то, и другое исключается. Итак, если сечение поверхности плоскостью  $\alpha$  является прямолинейным отрезком, то поверхность имеет строение, указанное на рис. 58, а, где штриховкой обозначены направления образующих, а незаштрихованные участки — плоские.

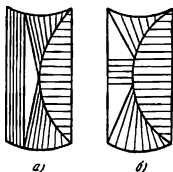


Рис. 58.

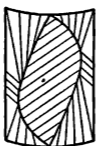
Рассмотрим теперь второй случай: на кривой  $l$  имеются два прямолинейных участка, расположенные симметрично относительно плоскости  $\beta$  и упирающиеся в край поверхности. Через каждую точку кривой  $l$  между прямолинейными отрез-

ками проходит прямолинейная образующая, перпендикулярная плоскости  $\beta$ , упирающаяся в ребро  $\gamma$ . Строение поверхности на оставшейся части выясняется рассмотрением, подобным предыдущему. Окончательный результат представлен на рис. 58, б, где, как и в предыдущем случае, штриховкой обозначено направление образующих, а незаштрихованные части — плоские.

Мы рассмотрели изометрическое преобразование цилиндрической поверхности при условии осевой симметрии вмятин.



а)



б)

Такое преобразование соответствует симметричному нагружению оболочки, например, равномерным внешним давлением. В других случаях нагружения, например, при кручении, изометрическое преобразование, обладая периодичностью строения в окружном направлении, имеет центрально-симметрические вмятины. Такое преобразование может быть качественно исследовано ана-

логичным приемом. Мы не будем приводить этого исследования и сформулируем лишь окончательный результат, предполагая поверхность в области вмятины цилиндрической. Этот результат представлен на рис. 59 и не нуждается в пояснениях.

**3. Аналитическое описание изометрического преобразования.** Практическое использование изометрического преобразования цилиндрической поверхности, полученное в п. 2; для исследования закритического упругого состояния цилиндрической оболочки предполагает удобное аналитическое представление этого преобразования. Сейчас мы дадим такое представление для того случая, когда вмятины имеют ось симметрии и достаточно вытянуты по длине оболочки.

Введем на развертке цилиндра координаты  $t$  и  $\beta$ , приняв за ось  $t$  ось симметрии предполагаемой вмятины, а за ось  $\beta$  — край поверхности. Пусть в этих координатах предполагаемое ребро  $\gamma$  задается уравнением

$$\beta = \beta(t).$$

Введем, далее, пространственные прямоугольные координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , связанные с рассматриваемой поверхностью, приняв за ось  $x$  прямую, соединяющую граничные точки вмятины на краю поверхности, а за ось  $y$  касательную к краю поверхности в одной из этих точек (рис. 60).

Уравнения ребра  $\gamma$  (границы вмятины) в этих координатах запишутся так:

$$\bar{x} = x(t), \quad y = \beta(t), \quad z = \lambda(t).$$

Ограничиваясь практически важным случаем, когда  $\lambda'$  не слишком велико, можно принять  $x(t) \simeq t$ . Тогда уравнения ребра примут вид

$$x = t, \quad y = \beta(t), \quad z = \lambda(t).$$

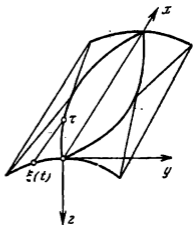


Рис. 60.

Аналитическое описание изометрического преобразования в варианте, представленном на рис. 58, б, предполагает определение функции  $\lambda(t)$  и функции  $\xi(t)$ , задающей  $y$  — координату конца прямолинейной образующей в зависимости от параметра  $t$  (см. рис. 60). Для этих двух функций могут быть составлены два дифференциальных уравнения, выражающие собой геометрическое условие наложимости рассматриваемой поверхности на плоскость. Найдем эти уравнения.

Так как поверхность изометрична плоскости, то вдоль ребра касательные плоскости поверхности образуют с соприкасающейся плоскостью ребра равные углы. Проведем из точки  $(t)$  на ребре  $\gamma$  соприкасающуюся плоскость ребра и касательные плоскости поверхности. Нормали к ним лежат в одной плоскости и в силу характера рассматриваемых деформаций образуют малые углы. Поэтому указанное условие равенства углов между нормальными можно отнести к их проекциям на плоскость  $x = 0$ . При проектировании на эту плоскость нормали касательной плоскости со стороны вмятины она (нормаль) перейдет в ось  $z$ . Найдем углы, образуемые проекциями нормалей двух других плоскостей с осью  $z$ .

Компоненты нормали соприкасающейся плоскости ребра по осям  $y$  и  $z$  соответственно равны

$$\begin{vmatrix} \lambda' & 1 \\ \lambda'' & 0 \end{vmatrix} = -\lambda'', \quad \begin{vmatrix} 1 & \beta' \\ 0 & \beta'' \end{vmatrix} = \beta''.$$

Угол проекции нормали на плоскость  $x = 0$  с осью  $y$  можно считать равным  $\simeq -\lambda''/\beta''$

Касательная плоскость поверхности у ребра со стороны, внешней по отношению к вмятине, проходит через касательную к ребру и касается края поверхности. Вдоль края поверхности

$$y = \xi(t), \quad z \simeq \frac{1}{2R} \xi^2(t),$$

где  $R$  — радиус основания. Поэтому компоненты нормали касательной плоскости по осям  $y$  и  $z$  соответственно будут

$$\begin{vmatrix} \lambda' & 1 \\ \frac{\xi\xi'}{R} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\xi\xi'}{R}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \beta' \\ 0 & \xi' \end{vmatrix} = \xi'.$$

Угол проекции нормали на плоскость  $x = 0$  с осью  $y$  можно считать равным  $\simeq -\xi/R$ .

Теперь упомянутое выше условие разворачивания поверхности вдоль ребра можно выразить в форме следующего уравнения:

$$\frac{\lambda''}{\beta''} = \frac{\xi}{2R}. \quad (*)$$

Условие наложимости на плоскость поверхности вне вмятины сводится к компланарности трех прямых: прямолинейной образующей  $(t, \xi(t))$ , касательной к ребру  $\gamma$ , и касательной к краю поверхности на конце образующей. Это условие состоит в том, что

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta' & \lambda' \\ 0 & 1 & \frac{\xi}{R} \\ t & \beta - \xi & \lambda - \frac{\xi^2}{2R} \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\lambda - t\lambda') + \frac{\xi}{R}(\beta't - \beta) + \frac{\xi^2}{R} = 0. \quad (**)$$

Дифференцируя уравнения (\*\*) и исключая  $\lambda''$  с помощью уравнения (\*), получим  $\frac{\xi}{2}(\beta''t) + \xi'(\beta't - \beta) + \xi\xi' = 0$ . После умножения на  $\xi$  это уравнение интегрируется и получается  $\frac{2}{3}\xi^3 + \xi^2(\beta't - \beta) = \text{const}$ . Постоянная интегрирования равна нулю, так как  $\xi = 0$  при  $t = 0$ . В результате для  $\xi(t)$  получается следующее выражение:  $\xi = \frac{3}{2}(\beta - t\beta')$ .

Эту формулу можно интерпретировать геометрически. Именно, касательная кривой  $\gamma$  на развертке цилиндра отсекает на краю цилиндра отрезок  $\beta - \beta't$ , а образующая, исходящая из той же точки, отсекает в полтора раза больший отрезок. Отсюда нетрудно заключить, что изометрическое преобразование в рассматриваемом варианте будет иметь место до тех пор, пока ширина вмятины не превосходит двух третей между осями соседних вмятин.

Теперь, когда функция  $\xi(t)$  известна, функция  $\lambda(t)$  находится с помощью квадратур из уравнения

$$\lambda'' = \frac{3\beta''}{4R}(\beta - \beta't).$$

Одна из этих квадратур выполняется в общем случае (при любом  $\beta(t)$ ). Действительно, умножив уравнение на  $t$  и интегрируя, получим  $\lambda't - \lambda = -\frac{3}{8R}(\beta't - \beta)^2$  (постоянная интегрирования равна нулю, так как при  $t=0$  будет  $\beta=0$  и  $\lambda=0$ ). Окончательно функция  $\lambda(t)$  представляется в виде

$$\lambda = -\frac{3t}{8R} \int_0^t \left(\beta' - \frac{\beta}{t}\right)^2 dt + ct.$$

Постоянная интегрирования определяется из условия  $\lambda(L) = 0$ , где  $L$  — длина цилиндра.

Мы рассмотрели случай, когда соседние вмятины разделены куском исходной цилиндрической поверхности. В другом варианте, когда между вмятинами появляется цилиндрическая поверхность, перпендикулярная плоскости симметрии  $\beta$  (см. п. 2), описание формы в этой части ничем не отличается от того, которое было проведено в гл. 3.



## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Погорелов, К теории выпуклых упругих оболочек в закритической стадии. Издательство Харьковского университета, 1960.
  2. А. В. Погорелов, Цилиндрические оболочки при закритических деформациях. I. Осевое сжатие. Издательство Харьковского университета, 1962.
  3. А. В. Погорелов, Цилиндрические оболочки при закритических деформациях. II. Внешнее давление. Издательство Харьковского университета, 1962.
  4. А. В. Погорелов, Цилиндрические оболочки при закритических деформациях. III. Кручение. Издательство Харьковского университета, 1962.
  5. А. В. Погорелов, Цилиндрические оболочки при закритических деформациях. IV. Ограниченно упругие оболочки. Панели. Ортотропные оболочки. Издательство Харьковского университета, 1963.
  6. А. В. Погорелов, Строго выпуклые оболочки при закритических деформациях. I. Сферические оболочки. Издательство Харьковского университета, 1964.
  7. А. В. Погорелов, Строго выпуклые оболочки при закритических деформациях. II. Потеря устойчивости оболочек. Издательство Харьковского университета, 1964.
  8. А. В. Погорелов, Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей. Издательство АН УССР, 1952.
  9. А. В. Вольмир, Гибкие пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1956.
  10. В. И. Бабенко, О закритических деформациях конических оболочек, находящихся под внешним давлением и осевым сжатием. Вестник Харьковского гос. университета, серия механико-математическая, т. 31, 1965.
  11. В. І. Бабенко, Про закритичні деформації конічних оболонок при крученні. Доповіді АН УРСР, 9, 1965.
  12. В. В. Михайлов, Определение нижней критической нагрузки конической оболочки при продольном сжатии. Вестник Харьковского гос. университета, серия механико-математическая, т. 31, 1965.
  13. А. В. Погорелов, Поверхности ограниченной внешней кривизны, Издательство Харьковского университета, 1956.
-

*И. И. Ворович*

**ПОСЛЕСЛОВИЕ К КНИГЕ А. В. ПОГОРЕЛОВА  
«ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ  
ОБОЛОЧЕК»**

Проблема упругой устойчивости занимает одно из центральных мест в современной механике. Ее решение исключительно важно для практики в связи с широким использованием тонкостенных элементов в технике, особенно в ее новейших отраслях. Вместе с этим, характерной чертой проблемы является ее сложность с точки зрения строгого математического анализа и численного решения.

В последние годы можно отметить серьезные сдвиги в ее решении, однако, трудности настолько велики, что несмотря на большие усилия, прилагающиеся здесь, многие принципиальные вопросы еще не ясны, а численные результаты решения одних и тех же конкретных задач у разных авторов получаются с большим разбросом.

Для уяснения причин, порождающих сложность задачи устойчивости, попытаемся установить, что должно быть получено в результате ее решения.

При эксплуатации объектов, содержащих тонкостенные элементы, в ряде случаев эти элементы могут, вообще говоря, при фиксированных условиях иметь несколько форм равновесия и даже несколько устойчивых форм. Из них обычно только одна является желательной, предусмотренной конструктором. Переход же в другие формы, как правило, влечет опасные явления вплоть до разрушения конструкции.

Таким образом, при решении вопроса устойчивости нам необходимо охарактеризовать условия, обеспечивающие пребывание тонкостенного элемента в желательной, предусмотренной конструктором форме равновесия. В приборах

автоматики мы часто сталкиваемся с противоположной ситуацией: необходимо выяснить условия, при которых будет обеспечен переход из одной формы равновесия в другую. Следовательно, в теории устойчивости тонкостенных элементов должны быть развиты качественные методы определения числа форм равновесия системы при данных условиях и методы оценки степени реальности каждой из этих форм. Эти две проблемы и составляют основное содержание теории устойчивости тонкостенных элементов. В настоящее время наибольшее развитие получила первая проблема. Что касается второй проблемы, то несмотря на ее важность она начала разрабатываться лишь недавно на базе вероятностных методов.

При анализе первой проблемы в основном стараются выяснить пределы изменения параметров нагрузки, при которых данная система имеет единственную форму равновесия. Л. Эйлер на примере продольного изгиба стержня указал путь отыскания этих пределов на основе перехода к линеаризованной задаче. Этот метод впоследствии стал широко использоваться и был строго обоснован. Он вполне оправдал себя применительно к стержням, стержневым системам, пластинам. В немалой степени этому способствовало то обстоятельство, что линеаризация в этих случаях производится в окрестности безмоментного напряженного состояния, которое может быть здесь рассчитано сравнительно простыми, а иногда и просто элементарными средствами.

Однако попытки использовать линеаризацию для решения задач устойчивости оболочек оказались неудачными. Принцип линеаризации в такой форме, в какой он применялся ранее, давал совершенно искаженное представление о критических значениях нагрузок. Оказалось, что его следует использовать, линеаризуя задачу в окрестности заранее неизвестного решения или же нужно вообще отказаться от линеаризации и перейти к непосредственному глобальному исследованию нелинейных уравнений, описывающих деформацию оболочки. Последние же представляют собой сложную систему уравнений в частных производных, содержащую параметр нагрузки  $\lambda$ . Речь, по существу, идет об исследовании спектра некоторой нелинейной краевой задачи. В ряде случаев это исследование удается провести строго, однако конкретный расчет характерных точек спектра приходится всегда производить приближенно, главным образом прямыми методами.

Отсюда и становится ясной исключительная трудность математического исследования проблемы устойчивости тонкостенных элементов, о которой речь шла выше. Сложность задачи значительно возрастает, если материал тонкостенного элемента начинает работать за пределами упругости. Существенные затруднения мы испытываем и тогда, когда пытаемся применить в описываемой проблеме приближенные методы. Дело в том, что срединная поверхность тонкой оболочки при потере устойчивости принимает форму, которая имеет участки плавного изменения и участки весьма сильного изменения рельефа. Это весьма усложняет использование прямых методов, так как такую форму срединной поверхности очень трудно аппроксимировать простыми аналитическими средствами. Для получения достаточной точности приходится прибегать к использованию прямых методов в высоких приближениях, что крайне громоздко. Отмеченный выше сложный характер деформированного состояния срединной поверхности в большой мере объясняется геометрией ее недеформированного состояния. Здесь мы естественным образом подошли к идеям выдающегося советского геометра А. В. Погорелова, развившего метод исследования устойчивости оболочек, основанный на тонком анализе геометрических факторов. В связи с этим нужно сказать, что имеется весьма тесная связь между задачами теории оболочек и некоторыми вопросами теории поверхностей. Широко известно, что уравнения безмоментного напряженного состояния оболочки тождественны уравнениям, коими описываются бесконечно малые изгибания ее срединной поверхности. Этот факт есть одно из проявлений глубоких связей между статическими и геометрическими соотношениями, выраженных в статико-геометрической аналогии. Вообще, некоторые задачи теории поверхностей можно трактовать как задачи равновесия двумерных сред, наделенных определенными физическими свойствами. Так, задачу об однозначной определенности поверхности при заданных условиях закрепления можно трактовать как задачу о числе форм равновесия двумерного континуума, имеющего нулевую жесткость на изгиб и бесконечно большую жесткость на растяжение. Можно расширить постановку задачи, допустив, что континуум имеет конечную жесткость на растяжение и энергия, накопленная при растяжении, пропорциональна изменению площади. Мы приходим, таким образом, к за-

даче Плато, и вместо вопроса об однозначной определенности такой поверхности здесь целесообразно интересоваться числом форм равновесия. Можно еще расширить постановку задачи, положив, что энергия деформации двумерного континуума есть некоторая функция изменения коэффициентов первой и второй квадратичных форм. Поставив задачу об отыскании числа форм равновесия такого континуума, мы по существу и приходим к проблеме устойчивости оболочек, как ее понимают в теории упругости. Отличительная черта построений А. В. Погорелова заключается в том, что здесь геометрические методы используются как конкретное средство решения проблемы устойчивости.

Учитывая весьма малое изменение длин на срединной поверхности при реальных деформациях оболочек, даже если ее форма при этом существенно изменяется, А. В. Погорелов приходит к выводу, что срединная поверхность оболочки должна быть близка к изометрическим отображениям ее недеформированного состояния. Так как в практически важных случаях условия закрепления таковы, что гладкие изометрические отображения отсутствуют, то приходим к необходимости искать деформированную срединную поверхность оболочки в классе гладких поверхностей, близких нерегулярным изометрическим отображениям первоначальной формы. Этим, в частности, объясняется то своеобразие формы срединной поверхности оболочки, которое она получает в закритической стадии и о котором речь шла выше. Важно отметить, что это обстоятельство подтверждается на опытах с весьма тонкими оболочками. Указанный факт подсказывает и способ аппроксимации срединной поверхности при использовании прямых методов. А. В. Погорелов аппроксимирует ее гладкой поверхностью, близкой к некоторому нерегулярному изгибанию первоначальной формы срединной поверхности. Появляющийся при этом произвол автор находит из вариационного принципа Лагранжа. На этой основе исследованы закритические состояния строго выпуклых оболочек при разных нагрузках. При действии сосредоточенной силы установлено отсутствие «хлопка», что подтверждается решением этой же задачи методом Бубнова — Галеркина в высоких приближениях. Для случая равномерной нагрузки таким путем получается падающая часть характеристики нагружения. Аналогичный подход используется и для расчета нижних

критических чисел цилиндрических оболочек при разных нагрузках.

Геометрические соображения используются в книге также для расчета верхних критических сил с той лишь разницей, что здесь для аппроксимации деформированной срединной поверхности применяются ее бесконечно малые изгибания. При этом автор строит разрывные поля бесконечно малых изгибаний, сопряженные определенным образом вдоль некоторой линии на основе энергетических соображений.

Геометрическая аппроксимация лежит в основе предлагаемого А. В. Погореловым метода решения динамических задач. С использованием принципа Остроградского — Гамильтона рассматривается задача о динамическом «хлопке» для сферического купола, нагруженного равномерной нагрузкой. Отыскивается значение дополнительного импульса, который в состоянии перебросить оболочку в закритическую форму. Здесь же рассмотрены и динамические задачи для цилиндрической оболочки.

Сильные стороны метода А. В. Погорелова заключаются в его наглядности, простоте получаемых решений, общности постановки задач. Весьма важно отметить, что в ряде случаев окончательные формулы А. В. Погорелова получили тщательную опытную проверку. Сама постановка экспериментов, метод изготовления прецизионных оболочек, разработанный А. В. Погореловым, должны рассматриваться как существенный вклад в технику экспериментирования с оболочками.

Как и всякий приближенный метод, метод А. В. Погорелова имеет и определенные границы своего применения, до сих пор во многом неясные. Эти границы определяются тем, что в обсуждаемом методе форма аппроксимации срединной поверхности содержит только один варьируемый параметр, за счет которого и удовлетворяется приближенно вариационное уравнение Лагранжа или Остроградского — Гамильтона. В силу этого метод обладает слабой чувствительностью к характеру внешней нагрузки. Кроме того, метод фактически учитывает лишь одно из граничных условий  $W|_{\Gamma} = 0$ , что говорит о его слабой чувствительности к способу заделки. Например, вывод об отсутствии «хлопка» у жестко закрепленного сферического купола, нагруженного сосредоточенной силой, может не подтвердиться для

шарнирно опертого купола. Отметим, наконец, и такое обстоятельство. Хотя приближения, даваемые геометрическим методом, в ряде случаев оказываются вполне удовлетворительными, тем не менее очень часто может встать и вопрос об их уточнении. Здесь, на наш взгляд, в рамках геометрического подхода налицо очень трудные перспективы.

Вопрос о границах применимости геометрического метода представляется весьма важным. Сейчас пока из самых общих соображений можно предположить, что получаемое здесь приближение будет хорошим для очень тонких и не очень пологих оболочек. В связи с этим было бы весьма интересно получить основные результаты геометрического метода путем анализа общих уравнений нелинейной теории оболочек, совершая в этих уравнениях те или иные предельные переходы.

Некоторое сожаление приходится высказать в связи с тем, что автор нигде не сравнивает свои результаты с результатами более ранних исследований, хотя многие из задач, рассмотренных геометрическим методом, решались ранее другими методами.

Вместе с этим, книга А. В. Погорелова написана ясно и доходчиво. Она содержит необходимые для понимания основных вопросов сведения как из теории оболочек, так и из геометрии. Книга интересна для широкого круга читателей: специалистов в области теории упругости, инженеров, занимающихся использованием и расчетом оболочек, наконец для чистых математиков, интересующихся приложениями.

Выход в свет книги А. В. Погорелова безусловно вызовет большой интерес специалистов к анализу возможностей, которые открываются в теории оболочек с использованием геометрических методов.

Работа по осмысливанию и развитию этих возможностей, по определению пределов применимости геометрического метода безусловно положительно скажется на развитии проблемы устойчивости.

---